

核物理学特論

— 相対論的な場の量子論入門 —

徳島大学・総合科学部 日置 善郎

- 1 . ローレンツ変換と共変・反変ベクトル
- 2 . 古典力学のラグランジュ形式：解析力学
- 3 . 古典場のラグランジュ形式：場の解析力学
- 4 . 古典力学の量子化：量子力学
- 5 . 古典場の量子化：波動場の量子論
- 6 . 第2量子化：粒子場の量子論
- 7 . 相対論的場の量子論の形式
- 8 . 量子系の時間発展の記述
- 9 . 共変摂動論で計算する量
- 10 . 相対論的場の量子論での S 行列
- 11 . 伝播関数と時間順序積
- 12 . 朝永-ディラック描像と S 行列
- 13 . 断面積と崩壊幅
- 14 . 不変散乱振幅とファインマン則

1. ローレンツ変換と共変・反変ベクトル

特殊相対論は4次元ミンコフスキー時空 (Minkowski space-time) 上で定式化される。ここでは時間座標 t と空間座標 x は、まとめて4元ベクトルとして扱われ、異なる慣性系の間はローレンツ変換で結ばれる。よく教科書で例として扱われる一番簡単なローレンツ変換は、一つの慣性系 (S系) とそれに対して x 軸正の向きに一定の速さ v で運動する別の慣性系 (S'系) の間のものである。但し、ここでS系とS'系の3本の(空間)座標軸はお互いに平行で、かつ、両者が重なっていた瞬間の原点での時刻が共に0であるように、時間軸の原点が定められているものとする。要するに、両者は相対速度が x 軸の向きで、かつ、この相対速度が0の時に同一になるような関係である。この場合には、この変換は、同じ時空点のS系とS'系での座標をそれぞれ $(t, x, y, z), (t', x', y', z')$ として

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (1)$$

で与えられる。或いは、これを行列形式で表現すると

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2)$$

となる。^{#1}

以後、 $x^0 \equiv t, x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z$ という記法を採用することにして、一般のローレンツ変換を 取り敢えず $x'^a = \sum_{b=0}^3 \alpha^{ab} x^b$ と表しておく。さて、この4次元時空においては、二つのベクトルの内積はどのように定義すればよいだろうか。3次元空間の場合には、二つのベクトルの対応する成分同士を掛け合わせその和をとるのが内積であり、これは任意の座標軸回転の下で不変だった。ところが、4次元時空では二つの4元ベクトル $A^a = (A^0, A^1, A^2, A^3), B^a = (B^0, B^1, B^2, B^3)$ に対して $\sum_{a=0}^3 A^a B^a$ という組み合わせを作ってもローレンツ不変にはならない。

一方

$$AB = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \quad (3)$$

という組み合わせはローレンツ変換の下で不変であることが知られている。そこで、この組み合わせを「4次元時空でのベクトルの内積」と定義しよう。この内積を3次元空間の場合と同じよ

^{#1}この講義ノートでは自然単位系 ($\hbar = c = 1$) を採用している (p.55 の付録参照)。

うに、対応する成分同士の積の和の形で表すには $\bar{A}^a = (\bar{A}^0, \bar{A}^1, \bar{A}^2, \bar{A}^3) \equiv (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$ とでも書いて (或いは B^a に対して \bar{B}^a を定義して) $AB = \sum_{\mu=0}^3 \bar{A}^\mu B^\mu (= \sum_{\mu=0}^3 A^\mu \bar{B}^\mu)$ とするしかないが、この時、 $\bar{A}^{1a} = \sum_{b=0}^3 \alpha^{ab} \bar{A}^b$ とはならない。実際、この式が正しいなら (1) 式の場合には、その第 0 成分は

$$\bar{A}^{10} = \frac{\bar{A}^0 - v\bar{A}^1}{\sqrt{1-v^2}} \implies A^{10} = \frac{A^0 + vA^1}{\sqrt{1-v^2}}$$

となるが、これは A^a の満たす式

$$A^{10} = \frac{A^0 - vA^1}{\sqrt{1-v^2}}$$

とは食い違う。

従って A^a と \bar{A}^a は異なる変換性を持つ。そこで、このことを明示するため A^a と \bar{A}^a を改めて

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3), \quad A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$$

と表し、前者をベクトル A の反変 (Contravariant) 成分 (或いは反変ベクトル)、後者を共変 (Covariant) 成分 (或いは共変ベクトル) と呼ぶ (何故こんな名前がついているのかについては後で考える)。このとき内積は次のように書くことができる：

$$AB = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$$

但し、ここで「上下に同じ文字が現われた場合にはそれについての和をとる」という相対論での習慣、いわゆるアインシュタイン (Einstein) の規約、に従い $\sum_{\mu=0}^3$ を省略した (以下同様)。

ここでわかったことは

$$A'^\mu B'_\mu = A^\mu B_\mu$$

であるが、上で述べたように

$$\sum_{\mu=0}^3 A'^\mu B'^\mu \neq \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B^\mu$$

つまり、上付き添字を持つ量同士の積を足し上げてもローレンツ変換の下で不変な組み合わせにはならないが、上付き添字と下付き添字の量からなら不変な量が得られるということである。これは相対論における計算で非常に重要な意味を持つ。そこでこの点を考えて、これからはベクトル A の反変成分に対する一般のローレンツ変換を

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} A^\nu \tag{4}$$

と表すことにする。

このように導入された内積は， $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) という記号を用いて $AB = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$ と表すことも出来る．ここで $g_{\mu\nu}$ は計量テンソル (Metric tensor) と呼ばれ， $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ かつ $\mu \neq \nu$ の時 $g_{\mu\nu} = 0$ という成分を持つ．すると $AB = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = g_{\mu\nu}B^\mu A^\nu = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$ だから A, B の共変成分はその反変成分より

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu, \quad B_\mu = g_{\mu\nu}B^\nu$$

と得ることが出来る．同様に $g^{00} = 1, g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$ ，これ以外の成分はすべて 0 という記号 $g^{\mu\nu}$ (これも計量テンソルと呼ばれる) を導入すれば，内積は $g^{\mu\nu}A_\mu B_\nu$ と書くことも出来，その結果， $A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu, B^\mu = g^{\mu\nu}B_\nu$ も成り立つ．つまり，計量テンソルを用いると添字の上げ下げが出来るのである．

ここで，共変成分が従う変換則を調べておこう．この成分は $A'_\mu = g_{\mu\rho}A'^\rho = g_{\mu\rho}\Lambda^\rho_\sigma A^\sigma = g_{\mu\rho}\Lambda^\rho_\sigma g^{\sigma\nu}A_\nu (= \Lambda_\mu^\nu A_\nu)$ と変換される．一方， Λ は内積を不変に保つという条件

$$A'B' = g_{\mu\nu}A'^\mu B'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma A^\rho B^\sigma = AB = g_{\rho\sigma}A^\rho B^\sigma$$

より $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}$ という関係を満たす．これは， $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$ (クロネッカーのデルタ) という関係を使えば $\Lambda_\mu^\rho \Lambda^\mu_\sigma = \delta_\sigma^\rho$ と書き直せるから，結局

$$\Lambda_\mu^\rho = (\Lambda^{-1})^\rho_\mu \tag{5}$$

これを使うと共変成分の変換は $A'_\mu = \Lambda_\mu^\rho A_\rho = A_\rho (\Lambda^{-1})^\rho_\mu$ となる．つまり共変成分は反変成分とは逆の変換 (Λ^{-1}) を受ける．

なぜ共変・反変と呼ばれるか

共変・反変ベクトルについては，これだけ知っていれば基本的知識としては十分だが，ついでに何故こんな名前がついているのかについて簡単に説明しておこう．まず，通常の 3 次元のベクトルを扱う時のように，各軸方向の基本単位ベクトルを導入する．これを $e(\mu)$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) と書こう．すると，この 4 次元時空内での任意の 4 元ベクトル u は，その反変成分 u^μ を用いて $u = \sum_{\mu=0}^3 u^\mu e(\mu)$ と表されることになる。^{#2} さて，この式で，左辺のベクトル u は座標軸とは無関係に存在する量だから，どんな慣性系から見ても u である．しかし，当然のことながら，異なる系ではその成分は一般には異なる値をとるし，また， $e(\mu)$ という四つのベクトルは，ベクトルとは言っても u とは違い，各座標軸と同じ向きのベクトルとして定義されるので，座標軸が動けばそれとともに $e(\mu) \rightarrow e'(\mu)$ と動く．ところが， $e'(\mu)$ と $e(\mu)$ の関係は u'^μ と

^{#2}特殊相対論での 4 元ベクトルは，3 次元のベクトルとは違って太文字では書かないのが普通だが，ここではベクトルそのものとその成分を明確に区別するためこのように書く．

u^μ の関係と同じではあり得ない．何故なら，上に述べた理由で $\sum_{\mu=0}^3 u'^\mu e'(\mu) = \sum_{\mu=0}^3 u^\mu e(\mu)$ でなければならないのに，もし $e(\mu)$ の変換性が $u'^\mu = A^\mu_\nu u^\nu$ と同じだとすると，内積のところで見たと同じようにそれが成り立たなくなるからである．ここまで来ればおわかりかと思うが， $e(\mu)$ は u_μ と同じ変換則に従うのである．実際，それならば

$$\mathbf{u} = \sum_{\mu=0}^3 u^\mu e(\mu) = \sum_{\mu=0}^3 u'^\mu e'(\mu)$$

が内積の不変性と同じ理由で成立する．そしてこれが共変・反変という名前の由来でもある： A_μ は基本単位ベクトルと同じように（“共に”）変換されるので共変成分と呼ばれ， A^μ はそれと反対の変換を受けるので反変成分と呼ばれるという訳である．

2．古典力学のラグランジュ形式：解析力学

力学に現われる基本方程式（運動方程式）はニュートン（Newton）の運動方程式 $F = ma$ である．単に質量と外力と加速度の関係というだけなら，その組み合わせには無限の種類があるが，自然は何故この組み合わせを特別に選んだのだろうか？ $F = ma$ という形は，他の組み合わせに比較して何か特別な意味があるのだろうか？ また，電磁気学の基本方程式はマクスウェル（Maxwell）の方程式であり，ニュートンの運動方程式とは独立な方程式である．実際，その形も扱う対象も完全に異なるように見える．では，これらを統一的に記述するような，より基本的な法則はないのだろうか？ これらの疑問に対して（100% 満足という訳にはいかないが）一つの解答を与えるのが最小作用の原理（Principle of least action）である．

この立場では，どんな物理系もそれに固有のラグランジアン（Lagrangian） L という量で記述される．この L は一般化座標（Generalized coordinate） q_i とその時間微分 \dot{q}_i ($i = 1 \sim n$ はその系の自由度) の関数であるとされる：

$$L = L(q_i, \dot{q}_i)$$

簡単のため以下ではしばらく自由度 1 の系で考える（例えば x 軸上を運動する粒子 1 個の系）．時刻 t_1 から t_2 までの間のこの粒子の運動（座標）は時間 t の関数として $q = q(t)$ と表される．このとき単に時間の関数というだけなら $q(t)$ の形は無限にある訳だが，実際にはそれは粒子が従う法則で決まってしまう．では，このように法則によって選ばれた関数形とその他の関数形は何がどう違うのか？ これは，冒頭での問い： $F = ma$ という組み合わせには特別な意味があるか？の別の表現だが，これに対する最小作用の原理の解答は以下のようなものであ

る：

最小作用の原理 作用 (Action) あるいは作用積分と呼ばれる量

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) \quad (6)$$

は、自然界で実現される $q = q(t)$ に対して最小値 (一般には極値) をとる。但し、始点と終点の値 $q(t_{1,2})$ は常に固定しておくものとする。

これが事実なら、逆にこれからその法則、つまり運動方程式を導くことが出来る。

$y = f(x)$ という関数の極値を微分で求める条件は $dy/dx = 0$ だった。つまり極値を実現する点とは、そこから任意の微小量だけ動いても関数の値が変化しないような点である。上の原理を満たす関数についても同様のことが言える。但し、こんどは関数形自体を、次のようにほんのわずか変化させても I の値は変わらないという条件となる：

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t) \quad (7)$$

$$\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t) = \dot{q}(t) + \frac{d}{dt} \delta q(t) \quad (8)$$

$$(\text{但し, } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0)$$

これは「微分」ではなく「変分 (Variation)」あるいは「汎関数微分 (Functional derivative)」と呼ばれる。関数を微分することとその変分をとることは独立な操作だから、両者の順序は交換できる (8) ではこの事実を用いた。

さて、このように $q(t)$ の変分をとると作用積分 I は

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right) \end{aligned}$$

(第2項の部分積分および $\delta q(t_{1,2}) = 0$ より)

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q$$

だけ変化することになるが、 $q(t)$ が自然界に実現されるものである時には、これが任意の微小量 $\delta q(t)$ に対して0になるというのだから

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (9)$$

でなければならない。これが、この形式において基本的・中心的役割を果たす方程式であり、ラグランジュ方程式 (Lagrange equation) と呼ばれている。

この形式では、さらに一般化運動量 (Generalized momentum) p が

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (10)$$

と定義され、これから系のエネルギーを表すハミルトニアン (Hamiltonian) H が

$$H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad (11)$$

と導入される。但し、この右辺の \dot{q} は上の $p = \partial L / \partial \dot{q}$ を逆に解いた $\dot{q} = \dot{q}(p, q)$ で置き換えられる。

例：1次元の質点の運動

この場合には、ラグランジアンは運動エネルギー $T(\dot{q}) (= m\dot{q}^2/2)$ と位置エネルギー $V(q)$ (通常は位置エネルギーは \dot{q} には依らない) を用いて

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - V(q) \quad (12)$$

と与えられることがわかっている。すると

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{dV}{dq} = F, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = m\ddot{q} (= m \frac{d^2 q}{dt^2})$$

だから、これをラグランジュの方程式に代入すれば

$$m\ddot{q} = F$$

となり、確かにニュートンの運動方程式が導かれる。また、運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

ハミルトニアンは

$$H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (13)$$

となり、通常の古典力学でおなじみの運動量と力学的エネルギーに一致する。

多くの自由度を持つ多体系の場合 (例えば、互いに力を及ぼし合う複数の質点の系) も全く同様に扱われる。その場合のラグランジアンは

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

であるが、これに最小作用の原理を適用すると、それぞれの自由度 i についての計 n 個のラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (i = 1 \sim n) \quad (14)$$

が得られる。

では上の例において、どうやって L の形がわかったのか？ 残念ながら現在のところ、与えられた系を支配するラグランジアンを発見するための基本原理はわかっていない。実際には「すでにわかっている方程式が出るように」、或いはより一般的に言えば「実験事実と合うように」 L を決めるのである。と言ってしまうとガッカリする人もいるかも知れないが、逆に言えば数学的な形式を整備するだけでそれまでわからなかった新しい法則が導かれるはずもない。このラグランジュ形式の利点は、とにかく系の情報をラグランジアンというただ一つのスカラー関数で表せることにある。それに、実際にはローレンツ共変性やその他の対称性などから L の形はある程度までは知ることが出来る。しかも、次節で示すように、この形式は電磁気学にも適用出来る。つまりニュートンの運動方程式もマクスウェルの方程式も共にラグランジュの運動方程式から導けるのである。このように力学や電磁気学をラグランジュ形式で書き表した体系は解析力学 (Analytical dynamics) と呼ばれている。

3. 古典場のラグランジュ形式：場の解析力学

多粒子系のラグランジアンは、もし粒子同士がお互いに相互作用をしていなければ

$$L = \sum_i L(q_i, \dot{q}_i) \quad (15)$$

という形をとる。ここで右辺の $L(q_i, \dot{q}_i)$ は 1 自由度の場合のラグランジアンである。このことを参考にすると、場 (電場や磁場など) についてもラグランジュ形式を構成することが出来る。

例えば、点 x における、ある時刻 t での電場

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$$

を考えてみよう。さて、ここでの座標 $x (= (x, y, z))$ は、粒子の記述に用いられる座標と同じ意味だろうか？ 答えは否である。粒子の座標は、その粒子の存在する場所を表しており、質点の場合には粒子そのものと言ってもよい。ところが、場の中に現われる座標は、単に空間の点を示すパラメータに過ぎない。つまりは多粒子系において座標につけられた添字 i と同じである。では粒子の座標 q に対応するものは何かと言うと、それは E 自身である。但し、添字 i は離散的であるのに対し、パラメータとしての座標は連続的なので、上記のラグランジアン (15) に対応する場のラグランジアンは、和の替わりに積分を用いて

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (16)$$

と与えられる．ここで場の量を一般的に ϕ と表した．また， x は4元座標 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ であり，^{#3} 右辺に現われた \mathcal{L} はラグランジアン密度と呼ばれている．^{#4} 粒子系の場合のラグランジュの方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (i = 1 \sim n)$$

に対応するものは，自由度を表すパラメータが連続変数であることより

$$\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} - \partial_\alpha \frac{\delta L}{\delta (\partial_\alpha \phi(x))} = 0 \quad (17)$$

(この第2項では相対論の習慣に従い \sum 記号を省略したが， α について0から3まで和をとっている) という変分方程式となるが，これはラグランジアン密度について書けば

$$\frac{\partial}{\partial \phi(x)} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) - \partial_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \phi(x))} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \right] = 0 \quad (18)$$

という通常の微分方程式となる．但し，ここで変分についての公式

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int d^3 \mathbf{x}' F(\phi(x')) = \frac{\partial}{\partial \phi(x)} F(\phi(x))$$

を用いた．

また，この場合の一般化運動量 $\pi(x)$ は

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (19)$$

ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(\pi(x), \phi(x), \partial_i \phi(x))$ とハミルトニアン H は

$$\mathcal{H}(\pi(x), \phi(x), \partial_i \phi(x)) = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (20)$$

$$H = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}(\pi(x), \phi(x), \partial_i \phi(x)) = \int d^3 \mathbf{x} \pi(x) \dot{\phi}(x) - L \quad (21)$$

となる．但し，ここでも(20)，(21)の中ではすべての $\dot{\phi}(x)$ は $\pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}(x)$ を $\dot{\phi}(x)$ について解いた $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\pi, \phi, \partial_i \phi)$ で置き換えられている．

更に，場が幾つかの成分を持っていたり，異なる種類の場が共存しているような場合には，その一つ一つの自由度 (a) に対して(18)が成り立ち，また， \mathcal{H} を与える(20)式の右辺第1項は，すべての自由度についての和となる．ラグランジアン密度，ハミルトニアン密度をそれぞれ $\mathcal{L}(x)$ ， $\mathcal{H}(x)$ と略記すれば

$$\frac{\partial}{\partial \phi_a(x)} \mathcal{L}(x) - \partial_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \phi_a(x))} \mathcal{L}(x) \right] = 0 \quad (22)$$

^{#3}時間座標と空間座標が同等に扱われる相対論的な理論では \dot{q} に対応する量は一般に $\partial_\mu \phi(x) (\equiv \partial \phi(x) / \partial x^\mu)$ となる．

^{#4}但し，実際にはこれも簡単にラグランジアンと呼ばれることも多い．以下でも特に厳密な区別はしない．

$$\mathcal{H}(x) = \sum_a \pi_a(x) \dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(x) \quad (23)$$

すでに述べたように電磁場もこの形式で記述することが出来る．事実

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad (24)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (25)$$

というラグランジアン密度から出発すると (22) 式 ($\phi_a(x)$ には $A_\mu(x)$ が対応) により

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = 0$$

が得られるが，これは共変形式で表された自由電磁場のマクスウェル方程式に他ならない．

4 . 古典力学の量子化：量子力学

古典物理学と比較しての量子物理学の大きな特徴は「演算子 (Operator) による物理量の表現」及び「実験結果に対する確率的予測」である．このうち前者に関しては，最も馴染み深いのは座標 x と運動量 p の関係だろう．1次元の場合，座標を実変数とすれば運動量は $p = -i\partial/\partial x$ と表される．初歩的な量子力学 (Quantum mechanics) の議論においては，これを知っていれば十分とも思われるが，実際には常に運動量が上記のような微分演算子で表される訳ではない．時には逆に座標を演算子で表すこともある．その際に重要なのは，座標と運動量が常に $[p, x] = -i$ という，いわゆる正準量子化 (Canonical quantization) の関係を満たすことである．この時， p と x は1次元の力学系における一般化運動量と一般化座標となっている．これより，もっと一般的な量子化の規則を得ることが出来る．つまり，まず注目している系の古典的なラグランジアンとその一般化座標 q および一般化運動量 p を探し，それらに対して

$$[p, q] = -i \quad (26)$$

という正準交換関係 (Canonical commutation relation) を設定することにより量子論に移行するのである．

次に，物理的結果に対する確率的予測は，運動量を演算子と見なす表示では状態の振舞いを記述する波動関数 (Wave function) $\psi(q, t)$ により行われるが，その $\psi(q, t)$ が従う運動方程式 (シュレディンガー方程式: Schrödinger equation) は，系の量子論的ハミルトニアン (古典的ハミルトニアン $H(p, q)$ の中で， p を量子論的演算子 $-i\partial/\partial q$ で置き換えたもの) を用いて

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(q, t) = H(-i\frac{\partial}{\partial q}, q)\psi(q, t) \quad (27)$$

と与えられる．つまり，解析力学は，大変に量子力学に書き換え易い形式になっている．

さて，量子系の状態は状態ベクトル (State vector) で表すことも出来る．この概念について簡単にまとめるために，波動関数 $\Psi(q, t)$ で記述される系を考える．この系において，ある物理量 A の測定をして A_n という結果が得られる確率振幅 (Probability amplitude) は，波動関数の言葉では

$$\int dq \psi_n^*(q) \Psi(q, t)$$

(但し， $A \psi_n(q) = A_n \psi_n(q)$) であるが，この積分は連続無限個の成分 (q) を持つ二つのベクトル ψ_n と Ψ の内積と見なすことも出来る．3次元空間のベクトルを考えればわかるように，ベクトルの成分は基準となる座標系の選び方に依存するが，ベクトルそれ自体はそれとは無関係である．従って，量子論の場合も，ベクトルの成分 (波動関数) よりもベクトルそのもので系を記述する方がより一般的である．そこで $\Psi(q, t)$ を第 q 成分とするベクトルを $|\Psi(t)\rangle$ と書く．これが状態ベクトルである．また，左から掛かる波動関数の複素共役に対応する状態ベクトルは $\langle \psi_n |$ と書かれる．従って，状態 $\Psi(t)$ の中に ψ_n を見出す上記の確率振幅は，状態ベクトルを用いれば簡潔に

$$\langle \psi_n | \Psi(t) \rangle$$

と表すことが出来る．すると，座標を変数とする波動関数 $\Psi(q, t)$ は，状態 (粒子) を座標 q において見出す確率振幅なので，粒子が q にいる状態を表す $|q\rangle$ との組み合わせ

$$\Psi(q, t) = \langle q | \Psi(t) \rangle$$

ということになる．また，シュレディンガー方程式も状態ベクトルの時間変化として

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(p, q) |\Psi(t)\rangle \quad (28)$$

と表す方が，より一般的で応用範囲が広い。^{#5}

更に，量子力学では相互作用も一般に演算子で表される． $|\psi_1\rangle$ という状態に V という相互作用が働けば，その状態は $|\psi_1'\rangle (= V |\psi_1\rangle)$ に変化する．それが $|\psi_2\rangle$ である確率は $|\langle \psi_2 | \psi_1' \rangle|^2 = |\langle \psi_2 | V | \psi_1 \rangle|^2$ に比例する．量子力学ではこの確率を求めるのが重要な課題の一つである．この点は場の量子論 (Quantum field theory) に進んでも全く変わらない．

^{#5}これは後で説明する「シュレディンガー描像」の方程式である．ここで演算子 p, q は時間依存性を持っていないこともいっしょに憶えておこう．なお，この方程式から $\Psi(q, t)$ の方程式へ戻するには (28) の両辺に左から $\langle q |$ を掛け， $\int dq |q\rangle \langle q| = 1$ (完全性条件) 及び $\langle q | F(p) | q' \rangle = F(-i \frac{\partial}{\partial q}) \delta(q - q')$ (F は任意の関数) という関係を用いればよい．

5 . 古典場の量子化：波動場の量子論

量子力学における離散固有値，連続固有値に対する波動関数の規格直交関係を思い出そう：

- 離散固有値の場合

$$\int dx \psi_i^*(x) \psi_j(x) = \delta_{ij}$$

- 連続固有値の場合

$$\int dx \psi_k^*(x) \psi_{k'}(x) = \delta(k - k')$$

つまり，離散量におけるクロネッカーのデルタは，連続量の場合にはディラック (Dirac) のデルタ (δ) 関数となる．

これは量子化においても同様で，量子力学の出発点である同時刻での正準交換関係

$$[p_i, q_j] = -i\delta_{ij}$$

に対する波動場の正準量子化の出発点は

$$[\pi(x), \phi(x')] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (29)$$

である．但し，ここで $x^0 = x'^0 (= t)$ である．これで時刻 t における場の演算子 $\pi(x)$, $\phi(x)$ が決まる.^{#6}

さて，量子力学は，原子構造や原子スペクトル，光電効果，黒体 (空洞) 輻射といった古典物理学では説明不可能な問題を解決する試みを通じて生まれてきた．では，古典場は何故量子化しなければならないのか？ 量子化して何かいいことがあるのだろうか？ 実は，光電効果は光が粒子性も持つことを要求するが，古典電磁場を量子化すると，自然に光の粒子像が現われてくるのである．ただ，電磁場はベクトル場 (Vector field) なので，その数学的取扱いは少々複雑になる．そこで以下ではもっと簡単な 1 成分のみの場 (スカラー場：Scalar field) を替りに用いて古典場の量子化とその帰結の基本的事項を説明しよう．

スカラー場とは，ローレンツ変換 (Lorentz transformation) $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ に対して

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

を満たす場である．相互作用がない状態の電磁ポテンシャル (Electromagnetic potential) $A_\mu(x)$ はローレンツゲージ (Lorentz gauge) においては

$$A_\mu(x) (\equiv \partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu(x)) = 0 \quad (30)$$

^{#6}注意：以下この節においては時間 t を含む量が幾つか出てくるが，量子化した後の量 (演算子) については，その t は任意の時刻ではなく，この「量子化の時刻」のことと理解してほしい．それらがその後どのように時間発展していくかについては，この先において考える．

を満たす．これと同様に，スカラー場 $\phi(x)$ が

$$\phi(x) = 0 \quad (31)$$

という運動方程式を満たす場合について考える．この場が常に実である場合の対応するラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) \quad (32)$$

である．これから，一般化運動量 $\pi(x)$ も

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(x)} \mathcal{L}(x) = \dot{\phi}(x) \quad (33)$$

と導かれる．

ここで量子化の前に，上記の方程式 (31) の解の形を見ておく必要があるが，同時に，そろそろ場の量子論を意識した話も始めないといけない．以下では特に量子化の前と後での場の時間依存性に注意しながら読んで欲しい．電磁気学でしばしば行われるように，解をフーリエ展開

$$\phi(x) = \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} q(\mathbf{k}, t) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

($d^3 \tilde{\mathbf{k}} \equiv d^3 \mathbf{k} / [(2\pi)^3 2k^0]$) の形で求めよう．これを (31) に代入すると

$$\frac{d^2}{dt^2} q(\mathbf{k}, t) + \mathbf{k}^2 q(\mathbf{k}, t) = 0$$

という式が得られるが，これはよく知られた調和振動子の方程式と同じ形であり，一般解は

$$q(\mathbf{k}, t) = q_1(\mathbf{k}) e^{-ik^0 t} + q_2(\mathbf{k}) e^{ik^0 t} \quad (k^0 = |\mathbf{k}|)$$

である．これより

$$\phi(x) = \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} [q_1(\mathbf{k}) e^{-ik^0 t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + q_2(\mathbf{k}) e^{ik^0 t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]$$

となるが， $\phi(x)$ は実スカラーであることを明示するために，右辺にその複素共役も加えよう：

$$\begin{aligned} \phi(x) = \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} [& q_1(\mathbf{k}) e^{-i(k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + q_2(\mathbf{k}) e^{i(k^0 t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ & + q_1^*(\mathbf{k}) e^{i(k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + q_2^*(\mathbf{k}) e^{-i(k^0 t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}] \end{aligned}$$

ここで，右辺の第 2 項と第 4 項で積分変数を $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ と変えて

$$= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} [[q_1(\mathbf{k}) + q_2^*(-\mathbf{k})] e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + [q_1^*(\mathbf{k}) + q_2(-\mathbf{k})] e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]$$

$$(kx = k_\mu x^\mu = k^0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

最後に

$$a(\mathbf{k}) \equiv q_1(\mathbf{k}) + q_2^*(-\mathbf{k})$$

と置いて

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^*(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (34)$$

を得る．ここで4元運動量 k^μ が

$$k^2 (= (k^0)^2 - \mathbf{k}^2) = 0 \quad \text{つまり} \quad k^0 = |\mathbf{k}| \quad (35)$$

を満たすことも解の条件であることを憶えておこう．これより一般化運動量も

$$\pi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [-ik^0 a(\mathbf{k})e^{-ikx} + ik^0 a^*(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (36)$$

と求まる．

ここで求めた解 $\phi(x)$, $\pi(x)$ はまだ量子化されていない古典場である．そして，それは任意の時刻 t に適用出来る．しかしながら，これらを量子化して得られる演算子の時間依存性については別に考察が必要である．

さて，この場合の量子化条件は(29)で与えた交換関係

$$[\pi(x), \phi(x')] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (37)$$

および

$$[\pi(x), \pi(x')] = [\phi(x), \phi(x')] = 0 \quad (38)$$

($x = (t, \mathbf{x})$ 及び $x' = (t, \mathbf{x}')$) である．これにともない $a(\mathbf{k})$, $a^*(\mathbf{k})$ も演算子 $a(\mathbf{k})$, $a^\dagger(\mathbf{k})$ で置き換えられ

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (39)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (40)$$

を満たす．

また，ハミルトニアンも $a(\mathbf{k})$, $a^\dagger(\mathbf{k})$ で表すことが出来る：

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{x} [\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x)] = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[\dot{\phi}^2(x) + \sum_{i=1}^3 \partial^i \phi(x) \partial^i \phi(x) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \int d^3\mathbf{x} \partial^\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{p}} \int d^3\mathbf{x} k^\mu p^\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[-a(\mathbf{k})a(\mathbf{p})e^{-i(k+p)x} + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{p})e^{-i(k-p)x} \right. \\
& \quad \left. + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{p})e^{i(k-p)x} - a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{p})e^{i(k+p)x} \right] \\
& = \frac{1}{2} \int d^3\tilde{\mathbf{k}} d^3\tilde{\mathbf{p}} (2\pi)^3 (k^0 p^0 + \mathbf{k}\mathbf{p}) \\
& \quad \times \left[-a(\mathbf{k})a(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})e^{-i(k^0+p^0)t} + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})e^{-i(k^0-p^0)t} \right. \\
& \quad \left. + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})e^{i(k^0-p^0)t} - a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})e^{i(k^0+p^0)t} \right] \\
& ((35)式より $k^0 = |\mathbf{k}|$, $p^0 = |\mathbf{p}|$ なので) \\
& = \frac{1}{2} \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{2k^0} \left[(-k^{02} + \mathbf{k}^2)a(\mathbf{k})a(-\mathbf{k})e^{-2ik^0t} + (k^{02} + \mathbf{k}^2)a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) \right. \\
& \quad \left. + (k^{02} + \mathbf{k}^2)a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - (k^{02} - \mathbf{k}^2)a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k})e^{2ik^0t} \right] \\
& = \frac{1}{2} \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 \left[a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \right] \\
& = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \text{定数項} \tag{41}
\end{aligned}$$

ここで最後の

$$\text{定数項} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{k} k^0 \delta^3(0)$$

は単にエネルギースケールの原点をずらす意味（或いは「真空のエネルギー」の意味）しかないし、真空のエネルギーは0ととるのが自然なので以後無視することにする。従って、この系のハミルトニアンは

$$H = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \tag{42}$$

となる。ここで、この系の重要な性質について述べておこう。もし、演算子同士が交換関係ではなく反交換関係に従うならば、上記のハミルトニアンは(41)式の最後から2番目の段階(\$aa^\dagger + a^\dagger a\$の部分)で単なる定数になってしまい、物理的に意味のない量となる。従って、\$\phi(x) = 0\$を基礎方程式とする系は交換関係により量子化されなければならない。実は、ディラック方程式(Dirac equation)に従う系において同様の計算をすると、逆に演算子が反交換関係(Anticommutation relation)に従う場合にのみ意味のある結果が出ることが知られている。

ここで

$$N \equiv \int d^3\tilde{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \tag{43}$$

という演算子を導入する。これは明らかにエルミート(hermite)であるからその固有値(Eigen value)は常に実数だが、ここではそれは更に正または0であると言える。事実、固有値を\$\xi\$、固有状態(Eigen state)を\$|\xi\rangle\$ (\$\neq 0\$)とすれば

$$\langle \xi | N | \xi \rangle (= \xi \langle \xi | \xi \rangle) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \langle \xi | a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) | \xi \rangle = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \langle a(\mathbf{k})\xi | a(\mathbf{k})\xi \rangle \geq 0$$

$$\langle \xi | \xi \rangle > 0$$

より, $\xi \geq 0$ である.

上で導入した $|\xi\rangle$ に $a(\mathbf{p})$ を 1 個作用させたらどうなるだろう? $a(\mathbf{p})|\xi\rangle \neq 0$ なら

$$\begin{aligned} Na(\mathbf{p})|\xi\rangle &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})a(\mathbf{p})|\xi\rangle \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k}) - (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})] a(\mathbf{k})|\xi\rangle \\ &= a(\mathbf{p})N|\xi\rangle - a(\mathbf{p})|\xi\rangle = (\xi - 1)a(\mathbf{p})|\xi\rangle \end{aligned} \quad (44)$$

つまり, $a(\mathbf{p})|\xi\rangle$ は $\xi - 1$ という固有値を持つ状態ということになるが, もし $(0 \leq) \xi < 1$ であったなら, $\xi - 1 < 0$ となり, N の固有値は負にはならないという性質と矛盾してしまう. 従って, この場合には $a(\mathbf{p})|\xi\rangle$ という状態は存在しない, つまり $a(\mathbf{p})|\xi\rangle = 0$ でなければならない. これは任意の \mathbf{p} に対して言えることだから

$$\int d^3\tilde{\mathbf{p}} a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p})|\xi\rangle (= N|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle) = 0$$

すなわち $\xi < 1$ であるならば常に $\xi = 0$ でなければならない.

次に, $\xi \geq 1$ の場合を考えよう. 上で見たように, この場合には $a(\mathbf{p})|\xi\rangle$ は固有値が $\xi - 1$ の状態として存在可能である. そこで同様に $a(\mathbf{p})$ を (種々の \mathbf{p} について) 次々と作用させていくと, 固有値が $\xi - n$ (< 1 , 但し n は正の整数) である状態に行き着く. するとこの状態には上の $\xi < 1$ の場合の議論が適用され $\xi - n = 0$ でなければならない. つまり, $\xi = n$ である. これより, N の固有値は正の整数または 0 しかないと結論できる.

ここで N の固有値が 0 である状態を $|0\rangle$ と表すことにしよう. 但し, $|0\rangle$ は $\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化しておく. すると, 上記のように任意の \mathbf{p} に対して

$$a(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \quad (45)$$

である. 従って

$$H|0\rangle (= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})|0\rangle) = 0 \quad (46)$$

つまり, $|0\rangle$ はエネルギーが 0 の状態を表していることになるが, これは真空状態 (Vacuum state) と解釈できる.

では, この真空状態に $a^\dagger(\mathbf{p})$ を 1 個作用させるとどんな状態が生まれるだろうか?

$$\begin{aligned} Ha^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= a^\dagger(\mathbf{p}) \int d^3\tilde{\mathbf{k}} k^0 [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})] |0\rangle \\ &= p^0 a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \end{aligned} \quad (47)$$

となるから，エネルギーが $p^0(=|p|)$ の状態である．更に，同様の計算で

$$Na^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

となるから， N の固有値は 1．従って， $a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ はエネルギーが p^0 の粒子が 1 個存在する状態で， N はこの粒子の個数演算子 (Number operator)， $n(\mathbf{k}) \equiv a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$ は個数密度演算子と解釈できる．しかも $p^0 = |p|$ だからこの粒子の運動量は p かつ質量は 0 である．つまり， $a^\dagger(\mathbf{p})$ は運動量が p の光子 (Photon) を 1 個つくる演算子 (= 生成演算子: Creation operator) であることがわかる．同様の考察により $a(\mathbf{p})$ は運動量が p の光子を 1 個消す演算子 (= 消滅演算子: Annihilation operator) であることもわかる．つまり，古典場を量子化することにより極めて自然な形で粒子像が得られるのである．但し，ここでは例として簡単な実スカラー場を用いたので，生まれた光子像も本物ではないが，実際の電磁場 (実ベクトル場) を量子化するとスピン 1 を持つ現実の光子が得られる．

正規積

生成・消滅演算子がこのように導入されたところで (41) 式から (42) 式への変形について再度考えてみよう．最後の段階で定数項 ($= \int d^3\mathbf{k} k^0 \delta^3(0)/2$) を手で落とす操作をした．しかし，この項は無限大の量であるし，また仮に有限であったとしても，それを勝手に取り除くことを不快・不審に感じる人もいるかも知れない．そこで正規積 (Normal product) という概念が導入される．上記の式変形がすべて古典論の段階で行われたとしたら $a^*a = aa^*$ だから，そのような定数は現われない．そこで「量子論に最適な形になるように，予めすべての式変形を済ませた後で実際に量子論に移行する」と考えればこの問題は回避される．もう少し具体的な表現をするなら「場の積で与えられる量については，量子化した時に各項において生成演算子はすべて消滅演算子の左側に来るように古典論の段階で整理しておく」ということを量子化の規則に付け加えるということである．この規則に従って作られた積を正規積と呼び，全体を $:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n):$ のように $::$ で挟んで表す ($N[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]$ という記法もある)．例えば $:aa^\dagger := a^\dagger a$ ， $:a_1^\dagger a_2 a_3^\dagger := a_1^\dagger a_3^\dagger a_2$ である．但し，生成演算子，消滅演算子同士の順序はそのままにしておく．また，フェルミ統計 (Fermi statistics) に従う場の場合には $:aa^\dagger := -a^\dagger a$ のように 1 回順序交換する毎にマイナス符号を付けるものとする．

この定義に従うと二つの場の正規積は

$$\begin{aligned} :\phi(x)\phi(y): &:= \int d^3\tilde{\mathbf{p}}d^3\tilde{\mathbf{q}}[a(\mathbf{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}][a(\mathbf{q})e^{-iqy} + a^\dagger(\mathbf{q})e^{iqy}] \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{p}}d^3\tilde{\mathbf{q}}[:a(\mathbf{p})a(\mathbf{q}): e^{-i(px+qy)} + :a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q}): e^{-i(px-xy)} \\ &\quad + :a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{q}): e^{i(px-xy)} + :a^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q}): e^{i(px+qy)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\tilde{\mathbf{p}}d^3\tilde{\mathbf{q}}[a(\mathbf{p})a(\mathbf{q})e^{-i(px+qy)} + a^\dagger(\mathbf{q})a(\mathbf{p})e^{-i(px-xy)} \\
&\quad + a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{q})e^{i(px-xy)} + a^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q})e^{i(px+qy)}] \quad (48)
\end{aligned}$$

となる．また，正規積で表された量の真空期待値（Vacuum expectation value）は常に 0 になる：

$$\langle 0 | : \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) : | 0 \rangle = 0 \quad (49)$$

何故なら，その定義から必ず消滅演算子が $|0\rangle$ に，或いは生成演算子が $\langle 0|$ に直接掛かるからである．量子力学の量子化の規則に慣れている人は，こんな規則を勝手に追加していいのか？と疑問に思うかも知れない．結論を先に言えば「追加してもいい」のである．正準量子化の出発点である正準交換関係 $[p, q] = -i$ だって我々が都合のいい結果が出るように“勝手に”導入した仮定である．ところが，この正準交換関係だけでは完全に満足いく結果が出ないことがわかったので，ここで新たな量子化の規則を設定する訳である．

最後に，系が交換関係により量子化されたことの意味について触れておこう． n 個の同種粒子系

$$a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)\cdots a^\dagger(\mathbf{p}_n)|0\rangle$$

において $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \cdots = \mathbf{p}_n$ と置いても何の問題も生じない．つまり，この粒子はいくつでも同時に同じ状態に入ることが出来る．これはこの粒子がボーズ統計（Bose statistics）に従う粒子であることを意味する（ボソン或いはボーズ粒子：Boson）．これが，もし反交換関係で量子化されていたなら，すでに $n = 2$ の段階で

$$a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle = -a^\dagger(\mathbf{p}_2)a^\dagger(\mathbf{p}_1)|0\rangle \implies a^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \quad (50)$$

つまり「一つの状態には 1 個の粒子しか入ることは許されない」というパウリの排他律（Pauli exclusion principle）が現われる．この場合には粒子はフェルミ統計に従うことになる（フェルミオン或いはフェルミ粒子：Fermion）．

6．第 2 量子化：粒子場の量子論

電磁場は，すでに古典物理学の中に実在の波動として存在しており，それを「古典力学の量子化 → 量子力学」にならって量子化した結果，電磁場の量子論・光子像が生まれてきた．そこで導入された生成消滅演算子を使う形式は，粒子や反粒子の生成・消滅が頻繁に起こる相対論的な素粒子反応の記述に威力を発揮するので，電子などの粒子系も同じ形式で扱えば大変便利だろう．

実のところ電子などは古典論では純粋な粒子なので、電磁場の量子化に倣うと言っても、量子化する波動がないように思える。ところが量子力学に進むとシュレディンガー方程式のような波動方程式に従う確率波が現われる。この波は一般に複素数で表されるため、古典電磁場のような「実在の波」ではないが、実は以下で示すように、この確率の波を量子化（第2量子化：Second quantization）することによって、対応する粒子系の場の量子論が得られることになる。

多体系の量子力学

話を簡単にするため、シュレディンガー方程式

$$H^{(1)}\varphi(\mathbf{x}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{x}, t) \quad \left(H^{(1)} = -\frac{1}{2m}\Delta + V(\mathbf{x}) \right) \quad (51)$$

で記述される非相対論的な粒子の系を例にとろう（ $H^{(1)}$ の (1) は1粒子に対する演算子であることを意味する）。ここで、互いに相互作用していない2個の粒子を考え、それぞれが、ある物理量、例えばエネルギー、の固有状態1, 2にいる時の固有関数を $\varphi_1(\mathbf{x}_1), \varphi_2(\mathbf{x}_2)$ 、固有値を $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ とする。この時、全体系のハミルトニアンは、粒子間相互作用がないことから

$$H = H_1^{(1)} + H_2^{(1)}$$

（下付き添字は作用する粒子を表す）となり、これより全体の波動関数は

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \varphi_1(\mathbf{x}_1)\varphi_2(\mathbf{x}_2)$$

と書ける。実際、

$$\begin{aligned} H\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= [H_1^{(1)}\varphi_1(\mathbf{x}_1)]\varphi_2(\mathbf{x}_2) + \varphi_1(\mathbf{x}_1)[H_2^{(1)}\varphi_2(\mathbf{x}_2)] \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varphi_1(\mathbf{x}_1)\varphi_2(\mathbf{x}_2) = \varepsilon\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

（ $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ）である。更に、これらが同種粒子である場合には、量子力学的同等性（Identity）により $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ は $\mathbf{x}_{1,2}$ の交換に対して対称（Symmetric）または反対称（Antisymmetric）でなければならない。波動関数がどちらに従うかはそれぞれの粒子に固有の性質である。ここでは対称の場合を考えることにすると

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(\mathbf{x}_1)\varphi_2(\mathbf{x}_2) + \varphi_2(\mathbf{x}_1)\varphi_1(\mathbf{x}_2)] \quad (52)$$

である。

さて、これを n 粒子系に拡張する。但し、話を簡単にするために可能な量子状態は二つしかないとする。と云うことは、どんな1粒子状態の波動関数も $\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x})$ の線型結合で表

せるということである．これはかなり非現実的に響くが，一般的な場合に拡張すると式が複雑になり過ぎるし，この簡単な例でも本質は同じなのでここではこのように仮定する．この二つの状態のうち，状態 1 を n_1 個の，状態 2 を n_2 個の粒子が占めているとする ($n = n_1 + n_2$) と，この状態を表す波動関数は

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = c_n(n_1, n_2) \sum_P \varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1) \varphi_{p(2)}(\mathbf{x}_2) \cdots \varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n) \quad (53)$$

$$c_n(n_1, n_2) \equiv \sqrt{n_1! n_2! / n!}$$

但し，和は n_1 個の 1 と n_2 個の 2 を左から並べるすべての順列についてとる．例えば，上記の 2 粒子系の波動関数は $n_1 = 1, n_2 = 1$ という 1 番簡単な場合であり， $n_1 = 1, n_2 = 2$ の場合には， $\{p(1), p(2), p(3)\}$ としては $\{1, 2, 2\}, \{2, 1, 2\}, \{2, 2, 1\}$ の 3 通りがある．これと同時に，対応する規格化された状態ベクトルを $|n_1, n_2\rangle$ と書くことにする．

この全体系に作用する演算子 F (ハミルトニアンや運動量演算子など) は粒子間の相互作用がない場合には，上の $H = H_1^{(1)} + H_2^{(1)}$ のように $F = \sum_i F_i^{(1)}$ と書ける．この F が $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ に作用すると，粒子がある状態から 1 個減り，ある状態に 1 個増えるという結果になる．何故なら $F_i^{(1)}$ の作用で見れば

$$F^{(1)} \varphi_{p(i)}(\mathbf{x}_i) = \langle 1 | F^{(1)} | p(i) \rangle \varphi_1(\mathbf{x}_i) + \langle 2 | F^{(1)} | p(i) \rangle \varphi_2(\mathbf{x}_i) \quad (54)$$

$$\langle a | F^{(1)} | p(i) \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \varphi_a^*(\mathbf{x}) F^{(1)} \varphi_{p(i)}(\mathbf{x}) \quad (a = 1, 2)$$

だから，^{#7} 結果として，始めの波動関数 Ψ の中で $\varphi_{p(i)}(\mathbf{x}_i)$ が $\varphi_1(\mathbf{x}_i)$ または $\varphi_2(\mathbf{x}_i)$ に置き換わった関数が得られるが，それは状態 $p(i)$ ($= 1$ または 2) から粒子が 1 個消え，状態 1 (第 1 項) または状態 2 (第 2 項) に粒子が 1 個生まれることを意味するからである．従って， F の行列要素の中では $\langle n_1 + 1, n_2 - 1 | F | n_1, n_2 \rangle, \langle n_1 - 1, n_2 + 1 | F | n_1, n_2 \rangle, \langle n_1, n_2 | F | n_1, n_2 \rangle$ のみが 0 でない．これ以外，例えば $\langle n_1 - 2, n_2 + 2 | F | n_1, n_2 \rangle$ などは粒子数は保存されているが， $\{\varphi_i\}$ が直交系である限りはすべて 0 になってしまう．

ここで実際に 0 でない行列要素 $\langle n_1 - 1, n_2 + 1 | F | n_1, n_2 \rangle$ を求めてみよう．

$$\begin{aligned} & \langle n_1 - 1, n_2 + 1 | F | n_1, n_2 \rangle \\ &= c_n(n_1 - 1, n_2 + 1) c_n(n_1, n_2) \sum_{P'} \sum_P \int d^3 \mathbf{x}_1 \cdots d^3 \mathbf{x}_n \\ & \quad \times \varphi_{p'(1)}^*(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{p'(n)}^*(\mathbf{x}_n) F \varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

^{#7} $F^{(1)}$ に添字 i を付ける理由は，それが \mathbf{x}_i に作用するということを明記するためだけなので，この式のようにそのことが始めから明らかな場合には付ける必要はない．

$$\begin{aligned}
&= c_n(n_1 - 1, n_2 + 1)c_n(n_1, n_2) \\
&\quad \times \sum_{P'} \sum_P \int d^3 \mathbf{x}_1 \cdots d^3 \mathbf{x}_n \varphi_{p'(1)}^*(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{p'(n)}^*(\mathbf{x}_n) \\
&\quad \times \left[\{F^{(1)}\varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1)\}\varphi_{p(2)}(\mathbf{x}_2) \cdots \varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n) \right. \\
&\quad \quad + \varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1)\{F^{(1)}\varphi_{p(2)}(\mathbf{x}_2)\} \cdots \varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n) + \cdots \cdots \cdots \\
&\quad \quad \left. + \varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1)\varphi_{p(2)}(\mathbf{x}_2) \cdots \{F^{(1)}\varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n)\} \right]
\end{aligned}$$

この最後の [] 内の i 番目の項 $\varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1) \cdots \{F^{(1)}\varphi_{p(i)}(\mathbf{x}_i)\} \cdots \varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n)$ を考える。今は 1 番目の量子状態から粒子が 1 個減る変化を考えているから $p(i) = 1$ でなければならない。更に、2 番目の量子状態に粒子が 1 個増えるのだから、 $F^{(1)}\varphi_{p(i)}(\mathbf{x}_i) = \langle 1|F^{(1)}|p(i)\rangle\varphi_1(\mathbf{x}_i) + \langle 2|F^{(1)}|p(i)\rangle\varphi_2(\mathbf{x}_i)$ と展開した時の第 2 項のみが 0 でない結果を与える。これは、すべての $i = 1 \sim n$ に共通に言えることだから、結局 $F^{(1)}\varphi_{p(i)}(\mathbf{x}_i)$ はすべて $\langle 2|F^{(1)}|1\rangle\varphi_2(\mathbf{x}_i)$ に置き換わる：

$$\begin{aligned}
&= c_n(n_1 - 1, n_2 + 1)c_n(n_1, n_2) \\
&\quad \times \sum_{P'} \sum_P \int d^3 \mathbf{x}_1 \cdots d^3 \mathbf{x}_n \varphi_{p'(1)}^*(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{p'(n)}^*(\mathbf{x}_n) \\
&\quad \times \langle 2|F^{(1)}|1\rangle \left[\varphi_2(\mathbf{x}_1)\varphi_{p(2)}(\mathbf{x}_2) \cdots \varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n) \right. \\
&\quad \quad + \varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1)\varphi_2(\mathbf{x}_2) \cdots \varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n) \\
&\quad \quad \left. + \cdots \cdots \cdots + \varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{p(n-1)}(\mathbf{x}_{n-1})\varphi_2(\mathbf{x}_n) \right]
\end{aligned}$$

ここで、左側から掛かる $\sum_{P'} \varphi_{p'(1)}^*(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{p'(n)}^*(\mathbf{x}_n)$ について考えてみると、これが右側の第 i 番目の項、つまり $\varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{p(i-1)}(\mathbf{x}_{i-1})\varphi_2(\mathbf{x}_i)\varphi_{p(i+1)}(\mathbf{x}_{i+1}) \cdots \varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n)$ に掛かって積分される時には、 $p'(i) = 2$ でなければならない。従って

$$\begin{aligned}
&= c_n(n_1 - 1, n_2 + 1)c_n(n_1, n_2)\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \sum_{i=1}^n \sum_{P'} \sum_P \int d^3 \mathbf{x}_1 \cdots d^3 \mathbf{x}_n \\
&\quad \times |\varphi_2(\mathbf{x}_i)|^2 \varphi_{p'(1)}^*(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{p'(i-1)}^*(\mathbf{x}_{i-1})\varphi_{p'(i+1)}^*(\mathbf{x}_{i+1}) \cdots \varphi_{p'(n)}^*(\mathbf{x}_n) \\
&\quad \times \varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{p(i-1)}(\mathbf{x}_{i-1})\varphi_{p(i+1)}(\mathbf{x}_{i+1}) \cdots \varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n)
\end{aligned}$$

ここで i 番目以外の項でも $p'(1) = p(1), p'(2) = p(2), \cdots, p'(n) = p(n)$ でなければ積分は 0 になってしまうから

$$\begin{aligned}
&= c_n(n_1 - 1, n_2 + 1)c_n(n_1, n_2)\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \sum_{i=1}^n \sum_P \int d^3 \mathbf{x}_1 \cdots d^3 \mathbf{x}_n \\
&\quad \times |\varphi_2(\mathbf{x}_i)|^2 |\varphi_{p(1)}(\mathbf{x}_1)|^2 \cdots |\varphi_{p(i-1)}(\mathbf{x}_{i-1})|^2 |\varphi_{p(i+1)}(\mathbf{x}_{i+1})|^2 \cdots |\varphi_{p(n)}(\mathbf{x}_n)|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_n(n_1 - 1, n_2 + 1)c_n(n_1, n_2)\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!} \\
&= c_n(n_1 - 1, n_2 + 1)c_n(n_1, n_2)\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \frac{n!}{(n_1-1)!n_2!} \\
&= \sqrt{n_1(n_2+1)}\langle 2|F^{(1)}|1\rangle
\end{aligned}$$

なお，下から3番目の等号（式変形）では， $n_1 - 1$ 個の1と n_2 個の2（ $n_1 + n_2 = n$ ）を1列に並べる方法は $(n-1)!/[(n_1-1)!n_2!]$ 通りあるということを用いた．従って

$$\langle n_1 - 1, n_2 + 1|F|n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1(n_2+1)}\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \quad (55)$$

これは量子状態の数が m の場合にも容易に拡張でき，

$$\langle n_i - 1, n_j + 1|F|n_i, n_j\rangle = \sqrt{n_i(n_j+1)}\langle j|F^{(1)}|i\rangle \quad (56)$$

となる．また，同様の計算により， F の期待値（平均値）は

$$\langle F \rangle = \sum_{i=1}^m \langle i|F^{(1)}|i\rangle n_i \quad (57)$$

と求まる．

生成・消滅演算子と第2量子化

多体系の量子力学では，以上のような計算が必要になってくるが，毎回それを行うのは面倒なので，波動場の量子論のようなもっと便利な形式を探してみよう．まず，系の記述には波動関数ではなく状態ベクトルのみを用いることにし，かつ実際に必要な情報は「どの量子状態の中に何個の粒子が存在するか」という事であることを考え，すでに先の例で用いた記法の拡張として

$$|n_1, n_2, \dots, n_m\rangle$$

という表現を用いる．但し， m は可能な量子状態の数， n_i は i 番目の量子状態を占める粒子数であり，

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_m | n_1, n_2, \dots, n_m \rangle = 1$$

と規格化されているとする．これで，系の状態は完全に指定できる．

さて，粒子系の場合には，波動場の場合とは異なり，粒子を1個，2個と生成したり消滅させたりする演算子は容易に導入することが出来る． i 番目の量子状態にある粒子の消滅演算子 a_i を

$$a_i |n_i\rangle = \sqrt{n_i} |n_i - 1\rangle \quad (58)$$

で定義しよう．但し， i 番目以外の状態の粒子数は変化しないということで省略した．すると

$$\langle n_i - 1 | a_i | n_i \rangle = \sqrt{n_i}$$

のみが a_i の 0 でない行列要素である．これより

$$\langle n_i - 1 | a_i | n_i \rangle^* = \sqrt{n_i} = \langle n_i | a_i^\dagger | n_i - 1 \rangle$$

だから， $a_i^\dagger | n_i - 1 \rangle = \sqrt{n_i} | n_i \rangle$ あるいは

$$a_i^\dagger | n_i \rangle = \sqrt{n_i + 1} | n_i + 1 \rangle \quad (59)$$

というように生成演算子も導入できる．すると，粒子数が確定している任意の状態 $|n\rangle \equiv |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle$ に対して

$$[a_i, a_i^\dagger] |n\rangle = |n\rangle, \quad [a_i, a_j^\dagger] |n\rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

$$[a_i, a_j] |n\rangle = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] |n\rangle = 0$$

が成立することは容易に確かめられるから

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (60)$$

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad (61)$$

が得られる.^{#8}

このように導入された生成・消滅演算子を用いると，演算子 F は

$$F = \sum_{i,j} \langle i | F^{(1)} | j \rangle a_i^\dagger a_j \quad (62)$$

と表すことが可能になる．事実

$$\begin{aligned} \langle n_i - 1, n_j + 1 | F | n_i, n_j \rangle &= \sum_{k,l} \langle k | F^{(1)} | l \rangle \langle n_i - 1, n_j + 1 | a_k^\dagger a_l | n_i, n_j \rangle \\ &= \langle j | F^{(1)} | i \rangle \sqrt{n_i(n_j + 1)} \end{aligned}$$

$$\langle F \rangle = \sum_{i,j} \langle i | F^{(1)} | j \rangle \langle n_1, \dots, n_m | a_i^\dagger a_j | n_1, \dots, n_m \rangle = \sum_i \langle i | F^{(1)} | i \rangle n_i$$

^{#8}波動場の量子化のところでは，現在 高エネルギー物理の世界で標準となっている “共变的規格化 (Covariant normalization)” $[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ を用いたが，ここでの話は単なる例なので，必要な式ができるだけ簡単になるような規格化を採っている．

のように波動関数を用いた計算 (56), (57) と同じ結果がずっと簡単に導き出せる .

また , ハミルトニアンも

$$H = \sum_{i,j} \langle i | H^{(1)} | j \rangle a_i^\dagger a_j \quad (63)$$

となるが , 特に $\varphi_i(\mathbf{x})$ として $H^{(1)}$ の固有状態 ($H^{(1)}\varphi_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_i\varphi_i(\mathbf{x})$) をとれば

$$H = \sum_i \varepsilon_i a_i^\dagger a_i \quad (64)$$

となる .

ただ , このままでは生成・消滅演算子を “手で” 導入しなければならないように見えるが , 実際にはもっとシステマティックに行える . それを見るために

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_i a_i \varphi_i(\mathbf{x}) e^{-i\varepsilon_i t} \quad (65)$$

と置くと , この演算子 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ は

$$H^{(1)}\Phi(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t)$$

を満たすが , これは 1 個の粒子が従うシュレディンガー方程式 (51) と全く同じ形である . また , この $\Phi(\mathbf{x}, t)$ と $\Phi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ の間には

$$\begin{aligned} [\Phi(\mathbf{x}, t), \Phi^\dagger(\mathbf{x}', t)] &= \sum_{i,j} \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j^*(\mathbf{x}') e^{-i(\varepsilon_i - \varepsilon_j)t} [a_i, a_j^\dagger] \\ &= \sum_i \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_i^*(\mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

(最後の等号では $\{\varphi_i\}$ の完全性の条件を用いた) という同時刻交換関係も成立する . ところが , Φ を電磁場と同じように場の量 (一般化座標) と見なせば , 上記のシュレディンガー方程式は

$$\mathcal{L} = i\Phi^* \dot{\Phi} + \frac{1}{2m} \Phi^* \Delta \Phi - V \Phi^* \Phi \quad (66)$$

から導かれるが , この時 Φ に正準共役な一般化運動量は

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = i\Phi^*$$

となるので , 演算子に移行する時には $\Phi^* \rightarrow \Phi^\dagger$ であることを考慮して上記の同時刻交換関係は

$$[\Pi(\mathbf{x}, t), \Phi(\mathbf{x}', t)] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

と書き直せる．そして，これは正に正準量子化の条件に一致する．従って，粒子系を場の理論形式に移行させるには，まず 1 個の粒子が満たすシュレディンガー方程式の解を古典的波動のように考え，対応するラグランジアンと一般化運動量を求めて正準量子化条件を課す．そして，場の量を，例えばエネルギーあるいは運動量の固有関数系で展開し，その展開係数を生成・消滅演算子と読み替えればよいのである．結局，これは波動場の量子化と全く同じ手続きである。^{#9} 但し，波動場（電磁場）の場合にはすでに古典論の段階で，波が存在していたので，それを直接量子化すればよかったが，粒子系の場合には，量子力学へ移行して初めて確率の「波」が現われ，それを量子化せよという訳である．第 2 量子化という名前はここに由来している．

7．相対論的場の量子論の形式

ここで，系の量子化から場の量子論を構成する手続きをまとめておく．但し，この講義では一貫して「正準量子化」法を採用しているが，この他に「経路積分（Path-integral）量子化」や「確率過程（Stochastic）量子化」といった方式もある．すでに示したように波動も粒子も同じ形式で記述出来るので，これ以降は波動場の量子論・粒子場の量子論などとは言わず，まとめて「場の量子論」と呼ぶことにする．

- (1) 対象となる系のラグランジアンを見出し，それより一般化座標，一般化運動量および場（以下 $\phi(x)$ と表す）が従う運動方程式を求め，完全系を構成するその運動方程式の解で $\phi(x)$ を展開する．
- (2) 一般化座標と一般化運動量の間で同時刻（反）交換関係を設定し，それらを演算子と読み換える（場の量子化）．これでこの時刻における場の演算子が決まる．但し， $\mathcal{L}(x)$ の中の場の積はすべて正規積であると理解する．
- (3) 同時に，上記の量子化条件より $\phi(x)$ の展開係数 a, a^\dagger の間の（反）交換関係を求める．これにより， a, a^\dagger が今考えている解の表す状態に粒子や反粒子を生成したり，消滅させたりする演算子（生成・消滅演算子）と解釈出来るようになる．運動量の固有状態（平

^{#9}波動場の方程式の解 (34) は a と a^* の項を両方含んでいるが (65) は a の項しか含んでいないので，“全く同じ”と言ってしまうと抵抗を感じる人もいるかも知れないが，この差は，この節の説明を，学部学生には最も馴染み深いであろう非相対論的なシュレディンガー方程式に基づいて行ったことから生じている．つまり， e^{-ikx} が $\phi(x) = 0$ の解なら e^{ikx} も解であるのに対し， $\varphi_i(x)e^{-i\varepsilon_i t}$ がシュレディンガー方程式の解でも $\varphi_i^*(x)e^{i\varepsilon_i t}$ は解にはならないということがその原因である．従って，見掛けは異なるが (34) 式も (65) 式もそれぞれ対応する運動方程式の一般解である．

面波：Plane wave) による展開がよく知られた例だが，他に角運動量の固有状態（球面波：Spherical wave) による展開などを考えることもある．

- (4) 消滅演算子 a を用いて $a|0\rangle = 0$ という条件で真空状態を定義し，それに生成演算子を作用させて考えている状態を構成する．

以下，もう少し具体的に

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \quad (67)$$

で記述される系を例として場の量子化の手続きをスケッチしよう．これは前に扱った系 (32) を拡張した実スカラー場の系である．但し，必要な計算は既に詳しく説明したものとほとんど同じなので，ここでは要点のみを記す．まず，このラグランジアンからはラグランジュ方程式として

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad (68)$$

が導かれる．これはクライン-ゴルドン方程式 (Klein-Gordon equation) と呼ばれている．この方程式の古典解は

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^*(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (69)$$

であることは容易に確かめられる．但し，ここでの解の条件は

$$k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

或いは同じことだが

$$k^2 = k^\mu k_\mu = m^2$$

である．これより ϕ に共役な運動量も

$$\pi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [-ik^0 a(\mathbf{k})e^{-ikx} + ik^0 a^*(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (70)$$

と表される．これらに対して正準交換関係

$$[\pi(x), \phi(x')] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (71)$$

および

$$[\pi(x), \pi(x')] = [\phi(x), \phi(x')] = 0 \quad (72)$$

($x = (t, \mathbf{x})$ 及び $x' = (t, \mathbf{x}')$) を要請すれば, ϕ, π は時刻 t で定義された演算子となり, その運動量展開 (69), (70) における展開係数も

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$$

を満たす演算子となる:

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}]_{x^0=t} \quad (73)$$

$$\pi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [-ik^0 a(\mathbf{k})e^{-ikx} + ik^0 a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}]_{x^0=t} \quad (74)$$

$a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$ が質量 m , 運動量 \mathbf{k} のスカラー粒子の生成・消滅演算子になっていることは以前の説明と全く同様に示すことが出来る.

さて, ここまでは相互作用は考えてこなかった. 実を言うと, 相互作用がある時に系を量子化し, 必要な量をそれに基づいて計算するのは上記の自由場の量子論とは大きく異なり大変に難しい. 上の実スカラー場系に $\mathcal{L}_I = -\lambda\phi^4/4!$ という相互作用項を加えた

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \quad (75)$$

というラグランジアンを考えてみよう. これは $\lambda\phi^4$ 模型と呼ばれており, この場が従う方程式は

$$(\square + m^2)\phi(x) = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3(x) \quad (76)$$

である. この例からわかるように, 相互作用の存在により場の運動方程式は一般に

$$(\square + m^2)\phi(x) = j(x) \quad (77)$$

という形に変わる. ここでも, この解を

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} q(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

と展開することは可能だが, これを (77) 式に代入しても自由場の時のような調和振動子型の微分方程式は得られない. 全体が実になるように係数 $q(\mathbf{k}, t)$ を分解して

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k}, t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^*(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

と書いても, $a(\mathbf{k}, t), a^*(\mathbf{k}, t)$ の時間依存性は具体的に相互作用の形が与えられないと決定出来ないし, また, $\lambda\phi^4$ 模型のように \mathcal{L}_I を決めたととしても, その形はかなり複雑になるため生成・消滅演算子のような解釈は無理である.

そこで、散乱を扱う場合には、反応のずっと前および後では相互作用の影響は0になると仮定し、そのような時間領域で系の量子化を行う。例えば、反応が起こる時刻を0、また ϵ を無限小定数として、相互作用項に $e^{-\epsilon|t|}$ というような因子が掛かっていると仮定する訳である。この因子は時間が有限の時には単に1になってしまうが、時間が $\pm\infty$ になると効いてくる。このような立場では、自由な場の生成演算子から構成された状態ベクトルが、相互作用の影響の下で如何に時間発展していくかを調べることになる。この「量子系の時間発展の記述の方法」が次節の主題である。

8. 量子系の時間発展の記述

これまでに繰り返し説明したように、系の量子化は、ある時刻 t_0 を選びそこで場の量の間
に同時刻(反)交換関係

$$[\pi_i(x), \phi_j(y)]_{x^0=y^0(=t_0)} = -i\delta_{ij}\delta^3(x-y)$$

を設定することにより行われる。次に、得られた場の演算子を例えばフーリエ展開し、その係数として現われる生成演算子を用いて状態を構成する。これで、この時刻における演算子 $\phi(x, t_0)$ と状態 $|\Psi(t_0)\rangle$ が決まる訳だが、物理として重要なのは、この系がこのあと時間の経過とともに相互作用の影響でどのように変化していくかである。ある場合には粒子同士が衝突し別の粒子を生成するだろう。或いは幾つかの粒子が崩壊するかも知れない。ともかく、どんな変化がどんな確率で起こるかを計算し、それを実験結果と比較することが、系とそこで働く力(相互作用)の性質の研究にとって必要不可欠である。

系の時間発展の代表的な記述法(描像)には「シュレディンガー描像(Schrödinger picture)」、
「ハイゼンベルグ描像(Heisenberg picture)」と「朝永-ディラック描像(Tomonaga-Dirac picture) (または相互作用描像: Interaction picture)」の3種類がある。とは言っても、これらの間の差は本質的なものではなく、単に(異なる座標系から同一の現象を見るのと同じく)立場の違いである。量子化の時刻 t_0 における場の演算子の期待値(平均値) $\langle\Psi(t_0)|\phi(x, t_0)|\Psi(t_0)\rangle$ が以後時間の経過とともにどのように変化していくかを考えてみよう。一般には場の演算子も状態ベクトルも共に時間変化し、時刻 t においては $\langle\Psi(t)|\phi(x, t)|\Psi(t)\rangle$ となるはずである。ところがシュレディンガー描像においては、この変化はすべて状態ベクトルの時間発展により起こるという立場をとる。一方、ハイゼンベルグ描像では場の演算子のみが時間発展を担う。これに対して朝永-ディラック描像はその中間的な立場をとり、場の演算子・状態ベクトル共に時間発展する。もちろん、どれを使っても同じ物理的結果が得られるように構成されている

が、これから先説明するように、摂動計算のためには3番目の朝永-ディラック描像が大変便利である。

以下ではシュレディンガー描像、ハイゼンベルグ描像、朝永-ディラック描像における場の演算子および状態ベクトルにはそれぞれ S, H, T という添字を付けることにする。但し、どの描像でも同じになる量には何も付けない。特に、基準となる量子化の時刻 t_0 の場の演算子と状態ベクトルは $\phi_0(\mathbf{x}), |\Psi_0\rangle$ と表すことにする。

シュレディンガー描像

この描像では時刻 t_0 での量子化の後、演算子はすべてそこで決まったもの $\phi_0(\mathbf{x})$ が使われ、状態の方が

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_S = H|\Psi(t)\rangle_S \quad (78)$$

に従い変化していく。ここでハミルトニアンも演算子なので $\phi_0(\mathbf{x})$ で表されている。この $\phi_0(\mathbf{x})$ に含まれる $a^\dagger(\mathbf{p})$ がこの描像で用いられる生成演算子であり、完全系を構成するすべての状態ベクトル(基底ベクトル)はこの生成演算子から作られる。この描像での場の演算子はしばしば $\phi_S(\mathbf{x})$ と表されるが、これは $\phi_0(\mathbf{x})$ のことである：

$$\phi_S(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx} \right]_{x^0=t_0} \quad (79)$$

上記の微分方程式(78)を $|\Psi(t_0)\rangle_S = |\Psi_0\rangle$ という境界条件で解くのがこの描像で必要な作業であるが、その解は

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle \quad (80)$$

あるいは時刻 $t_{1,2}$ の状態の関係として

$$|\Psi(t_2)\rangle_S = e^{-iH(t_2-t_0)}|\Psi_0\rangle = e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH(t_1-t_0)}|\Psi_0\rangle = e^{-iH(t_2-t_1)}|\Psi(t_1)\rangle_S$$

と書ける。但し(80)は相互作用がない場合($H = H_0$ と表す)には

$$H_0|\Psi_0\rangle = H_0a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)\cdots|0\rangle = (p_1^0 + p_2^0 + \cdots)|\Psi_0\rangle = E|\Psi_0\rangle$$

($E \equiv p_1^0 + p_2^0 + \cdots$ は状態 $|\Psi_0\rangle$ の全エネルギー)より

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iE(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

となるが、相互作用が働く場合には、単に形式的なものとなる。^{#10}しかし、ともかくこの(80)式を用いれば、時刻 t_i において Ψ_i という状態にあった系が、時刻 t_f に Ψ_f という状態にな

^{#10}ここで“形式的”というのは、確かに(80)は方程式(78)を満たしはするが、実際には $e^{-iH(t-t_0)}$ というのは無限個の項の和なので、これを使っても相互作用がある場合には具体的な計算はすぐには出来ないという意味である。

る確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ も (形式的ながら) コンパクトな式で表せる: 話を具体的にするために Ψ_i, Ψ_f は運動量がそれぞれ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ の n 粒子系, および $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ の m 粒子系とすると, 対応する状態ベクトルは

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle_S &= a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)\cdots a^\dagger(\mathbf{p}_n)|0\rangle \\ |\Psi_f\rangle_S &= a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)\cdots a^\dagger(\mathbf{q}_m)|0\rangle \end{aligned}$$

と与えられ

$$\mathcal{A}_S(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) = {}_S\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_S = {}_S\langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi(t_i)\rangle_S \quad (81)$$

(但し, ここで $|\Psi(t_i)\rangle_S = |\Psi_i\rangle_S$)

である.

なお, 通常はシュレディンガー描像での演算子や状態は時刻 $t = 0$ の量として導入されるが, ここでは一般性を保つために $t = t_0$ を基準とした. 従って, 以下ではしばしば他の教科書と $e^{(-)iHt_0}$ といった量だけの差が現われる. これが気になる人はこのノートの t_0 をすべて 0 と置くか, あるいは逆に他の教科書の対応する箇所ですべての時間変数 t を $t - t_0$ で置き換えればよい.

ハイゼンベルグ描像

この描像では逆に状態はそのまま演算子の方が時間発展する. 但し, すでに述べたように, どちらの描像でも演算子の期待値は同じになるように構成される. 従って

$$\begin{aligned} \langle\Psi_0|\phi_H(\mathbf{x}, t)|\Psi_0\rangle &= {}_S\langle\Psi(t)|\phi_0(\mathbf{x})|\Psi(t)\rangle_S \\ &= \langle\Psi_0|e^{iH(t-t_0)}\phi_0(\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle \end{aligned} \quad (82)$$

つまり

$$\phi_H(\mathbf{x}, t) = e^{iH(t-t_0)}\phi_0(\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)} \quad (83)$$

あるいは, ここでも時刻 $t_{1,2}$ の関係として表せば

$$\phi_H(\mathbf{x}, t_2) = e^{iH(t_2-t_1)}\phi_H(\mathbf{x}, t_1)e^{-iH(t_2-t_1)}$$

である (83) の両辺を時間微分すると

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi_H(x) = [\phi_H(x), H] \quad (84)$$

という方程式が得られる．これがハイゼンベルグ場（ハイゼンベルグ描像における場の演算子）が満たす方程式で，ハイゼンベルグ方程式（Heisenberg equation）と呼ばれる．

実は， $\lambda\phi^4$ 模型のように，具体的にラグランジアンを与えて方程式（84）を変形していくと，それが場の運動方程式（ラグランジュ方程式）に一致することが示せる．特に，相互作用がなく，かつ $m = 0$ の実スカラー場の場合には，それは演算子 ϕ に対する（31）式に等しい．従って，先に与えた時間を含む演算子は，そこでは量子化の時刻のものであると強調したが，実はそのまま任意の時間に適用することも出来，それは，時間に依存しない生成・消滅演算子 $a^{(\dagger)}(\mathbf{k})$ で表した，ハイゼンベルグ描像による自由粒子の記述になる訳である．事実，

$$\begin{aligned}\phi_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) &= e^{iH(t-t_0)}\phi_0(\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)} \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[e^{iH(t-t_0)}a(\mathbf{k})e^{-iH(t-t_0)}e^{-ikx} + e^{iH(t-t_0)}a^\dagger(\mathbf{k})e^{-iH(t-t_0)}e^{ikx} \right]_{x^0=t_0} \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[a_{\text{H}}(\mathbf{k}, t)e^{-ikx} + a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{k}, t)e^{ikx} \right]_{x^0=t_0}\end{aligned}$$

において，相互作用がない場合には $[H_0, a(\mathbf{k})] = -k^0 a(\mathbf{k})$ より

$$\begin{aligned}a_{\text{H}}(\mathbf{k}, t) &= e^{iH_0(t-t_0)}a(\mathbf{k})e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= a(\mathbf{k}) + i(t-t_0)[H_0, a(\mathbf{k})] + \frac{1}{2}i^2(t-t_0)^2[H_0, [H_0, a(\mathbf{k})]] + \dots \\ &= a(\mathbf{k}) \left[1 + (-ik^0)(t-t_0) + \frac{1}{2}(-ik^0)^2(t-t_0)^2 + \dots \right] \\ &= a(\mathbf{k})e^{-ik^0(t-t_0)}\end{aligned}\tag{85}$$

同様に $[H_0, a^\dagger(\mathbf{k})] = k^0 a^\dagger(\mathbf{k})$ より

$$a_{\text{H}}^\dagger(\mathbf{k}, t) = e^{iH_0(t-t_0)}a^\dagger(\mathbf{k})e^{-iH_0(t-t_0)} = a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik^0(t-t_0)}\tag{86}$$

となることに注意すれば

$$\phi_{\text{H}}(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}]$$

となるが，これは正に（34）式において係数 $a(\mathbf{k})$, $a^*(\mathbf{k})$ を生成・消滅演算子 $a(\mathbf{k})$, $a^\dagger(\mathbf{k})$ で置き換えたものである．

上記のように，この描像では生成・消滅演算子も

$$a^{(\dagger)}(\mathbf{k}) \rightarrow a_{\text{H}}^{(\dagger)}(\mathbf{k}, t) = e^{iH(t-t_0)}a^{(\dagger)}(\mathbf{k})e^{-iH(t-t_0)}\tag{87}$$

と時間発展していく．つまり各時刻毎に生成・消滅演算子が存在し（但し，相互作用の下では「生成・消滅演算子」という解釈が出来ないことは説明した通りだが），ある時刻の基底ベク

トルは，その時刻の生成演算子から構成されることになる．各時刻毎に状態ベクトルの完全系が導入されるのである．

従って，シュレディンガー描像のところで扱った確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ をこの描像で求めるために必要になる作業は，運動方程式を $\phi_{\text{H}}(x)|_{x^0=t_0} = \phi_0(\boldsymbol{x})$ という境界条件で解き，それから時刻 $t_{i,f}$ での生成演算子 $a_{\text{H}}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}, t_{i,f})$ を抜き出して状態 $|\Psi_{i,f}\rangle_{\text{H}}$ を

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle_{\text{H}} &= a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1, t_i) a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_2, t_i) \cdots a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_n, t_i) |0\rangle \\ |\Psi_f\rangle_{\text{H}} &= a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{q}_1, t_f) a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{q}_2, t_f) \cdots a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{q}_m, t_f) |0\rangle \end{aligned}$$

と構成していくことである．この時，求める確率振幅は

$$\mathcal{A}_{\text{H}}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) = {}_{\text{H}}\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle_{\text{H}} \quad (88)$$

で与えられる．これと (81) 式で得た $\mathcal{A}_{\text{S}}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ の関係を見てみよう (87) 式より

$$a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{k}, t) = e^{iH(t-t_0)} a^{\dagger}(\boldsymbol{k}) e^{-iH(t-t_0)} \quad (89)$$

だから

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle_{\text{H}} &= a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1, t_i) a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_2, t_i) \cdots a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{p}_n, t_i) |0\rangle \\ &= e^{iH(t_i-t_0)} a^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1) e^{-iH(t_i-t_0)} \cdots e^{iH(t_i-t_0)} a^{\dagger}(\boldsymbol{p}_n) e^{-iH(t_i-t_0)} |0\rangle \\ &= e^{iH(t_i-t_0)} a^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1) \cdots a^{\dagger}(\boldsymbol{p}_n) |0\rangle \\ &= e^{iH(t_i-t_0)} |\Psi_i\rangle_{\text{S}} \end{aligned} \quad (90)$$

同様に，

$$\begin{aligned} |\Psi_f\rangle_{\text{H}} &= a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{q}_1, t_f) a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{q}_2, t_f) \cdots a_{\text{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{q}_m, t_f) |0\rangle \\ &= e^{iH(t_f-t_0)} |\Psi_f\rangle_{\text{S}} \end{aligned} \quad (91)$$

(ここで真空の性質 $|0\rangle_{\text{H}} = |0\rangle_{\text{S}} = |0\rangle$ および $e^{-iHt}|0\rangle = |0\rangle$ を用いた) となる．従って

$${}_{\text{H}}\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle_{\text{H}} = {}_{\text{S}}\langle \Psi_f | e^{-iH(t_f-t_0)} e^{iH(t_i-t_0)} |\Psi_i\rangle_{\text{S}} = {}_{\text{S}}\langle \Psi_f | e^{-iH(t_f-t_i)} |\Psi_i\rangle_{\text{S}} \quad (92)$$

つまり，どちらの描像で計算しても確率振幅は同じという極めて当然の事実

$$\mathcal{A}_{\text{S}}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) = \mathcal{A}_{\text{H}}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$$

が確認出来る．

さて，ここまで説明してきたように，この描像でも時間発展は形式的には

$$\phi_H(x) = e^{iH(t-t_0)}\phi_0(x)e^{-iH(t-t_0)}$$

と表せた訳だが，これを用いても自由状態以外での実際の計算はやはり不可能に近い．そこで，少なくとも相互作用の寄与が小さい場合に有効な近似になる摂動 (Perturbation) 計算に適した別の描像が次に導入される．

朝永-ディラック (相互作用) 描像

$t = t_0$ においてハミルトニアンを，相互作用を含まない部分 H_0 と相互作用項 H_I に分ける：

$$H = H_0 + H_I \quad (93)$$

シュレディンガー描像では，状態のみが

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

と時間発展し，逆にハイゼンベルグ描像では，演算子のみが

$$\phi_H(x, t) = e^{iH(t-t_0)}\phi_0(x)e^{-iH(t-t_0)}$$

と時間発展するのであるが，ここで両者の中間的な描像を考える．つまり，演算子が

$$\phi_T(x, t) = e^{iH_0(t-t_0)}\phi_0(x)e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (94)$$

に従って変化していく描像である．これは朝永-ディラック描像あるいは相互作用描像と呼ばれる．これからわかるように，この描像では場の演算子は自由なハイゼンベルグ場と同じ方程式に従う．

場の演算子の期待値が描像に依らないという条件から

$$\begin{aligned} {}_T\langle\Psi(t)|\phi_T(x, t)|\Psi(t)\rangle_T &= {}_S\langle\Psi(t)|\phi_0(x)|\Psi(t)\rangle_S \\ &= {}_T\langle\Psi(t)|e^{iH_0(t-t_0)}\phi_0(x)e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_T \end{aligned}$$

つまり

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_T \quad (95)$$

或いは

$$|\Psi(t)\rangle_T = e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_S = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle \quad (96)$$

が得られる。^{#11} 更に，これを時間微分すれば

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_{\text{T}} &= -H_0 e^{iH_0(t-t_0)} |\Psi(t)\rangle_{\text{S}} + e^{iH_0(t-t_0)} i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_{\text{S}} \\
&= -H_0 e^{iH_0(t-t_0)} |\Psi(t)\rangle_{\text{S}} + e^{iH_0(t-t_0)} H |\Psi(t)\rangle_{\text{S}} \\
&= e^{iH_0(t-t_0)} H_1 e^{-iH_0(t-t_0)} |\Psi(t)\rangle_{\text{T}} \\
&= H_1(t) |\Psi(t)\rangle_{\text{T}}
\end{aligned} \tag{97}$$

となる．ここで $H_1(t) (= e^{iH_0(t-t_0)} H_1 e^{-iH_0(t-t_0)})$ は，この描像での相互作用ハミルトニアンである．これは，シュレディンガー描像での状態の方程式 $i\partial|\Psi(t)\rangle_{\text{S}}/\partial t = H|\Psi(t)\rangle_{\text{S}}$ に似ているが， $H_1(t)$ 自体が t を含むので，形式的にも $|\Psi(t)\rangle_{\text{T}} = e^{-iH_1(t)(t-t_0)} |\Psi_0\rangle$ などとは書けない． $|\Psi(t_{1,2})\rangle_{\text{T}}$ の関係を直接書くことも出来るが，シュレディンガー描像に比べると少々長くなる：

$$|\Psi(t_2)\rangle_{\text{T}} = e^{iH_0(t_2-t_0)} e^{-iH(t_2-t_1)} e^{-iH_0(t_1-t_0)} |\Psi(t_1)\rangle_{\text{T}} \tag{98}$$

この描像でも始状態・終状態は，ハイゼンベルグ描像と同様に時刻 $t_{i,f}$ での生成演算子 $a_{\text{T}}^\dagger(\mathbf{k}, t_{i,f})$ から構成される：

$$\begin{aligned}
|\Psi_i\rangle_{\text{T}} &= a_{\text{T}}^\dagger(\mathbf{p}_1, t_i) a_{\text{T}}^\dagger(\mathbf{p}_2, t_i) \cdots a_{\text{T}}^\dagger(\mathbf{p}_n, t_i) |0\rangle \\
|\Psi_f\rangle_{\text{T}} &= a_{\text{T}}^\dagger(\mathbf{q}_1, t_f) a_{\text{T}}^\dagger(\mathbf{q}_2, t_f) \cdots a_{\text{T}}^\dagger(\mathbf{q}_m, t_f) |0\rangle \\
a_{\text{T}}^\dagger(\mathbf{k}, t) &= e^{iH_0(t-t_0)} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-iH_0(t-t_0)}
\end{aligned}$$

これより，シュレディンガーおよびハイゼンベルグ描像で考えた確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ をこの描像で扱うと

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{T}}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) &= {}_{\text{T}}\langle \Psi_f | \Psi(t_f) \rangle_{\text{T}} \\
&= {}_{\text{T}}\langle \Psi_f | e^{iH_0(t_f-t_0)} e^{-iH(t_f-t_i)} e^{-iH_0(t_i-t_0)} | \Psi_i \rangle_{\text{T}}
\end{aligned} \tag{99}$$

となる．これが $\mathcal{A}_{\text{S,H}}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$ に一致することを示すのは容易である．

$a_{\text{T}}^{(\dagger)}(\mathbf{k}, t)$ は，シュレディンガー描像での演算子 $a^{(\dagger)}(\mathbf{k})$ とはどんな関係にあるだろうか．

$$a_{\text{T}}^{(\dagger)}(\mathbf{k}, t) = e^{iH_0(t-t_0)} a^{(\dagger)}(\mathbf{k}) e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{100}$$

という関係は (89) に似ているが，ここでは時間発展を決めるのは自由ハミルトニアン H_0 である．従って (85) (86) 式と同様に

$$a_{\text{T}}(\mathbf{k}, t) = a(\mathbf{k}) e^{-ik^0(t-t_0)}, \quad a_{\text{T}}^\dagger(\mathbf{k}, t) = a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik^0(t-t_0)}$$

^{#11}ここで，一般には H と H_0 は可換ではないので $e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} = e^{i(H_0-H)(t-t_0)} = e^{-iH_1(t-t_0)}$ などとやってはいけない．

となるので，結局 $a_{\text{T}}^{\dagger}(\mathbf{k}, t_{i,f})$ と $a^{\dagger}(\mathbf{k})$ はそれぞれ $e^{\pm ik^0(t_{i,f}-t_0)}$ という因子だけ異なっていることがわかる．しかしながら，これは絶対値が1の単なる位相因子であって， $|\text{T}\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_{\text{T}}|$ を求める時に消えてしまう．従って，実質的には両者は同じ演算子と考えてよい．また，これより，場の演算子も

$$\begin{aligned}\phi_{\text{T}}(x) &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[a_{\text{T}}(\mathbf{k}, t) e^{-ikx} + a_{\text{T}}^{\dagger}(\mathbf{k}, t) e^{ikx} \right]_{x^0=t_0} \\ &= \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{ikx} \right]\end{aligned}\quad (101)$$

と時間に依存しない生成・消滅演算子で表すことが出来る．実際の計算では，この $a^{(\dagger)}(\mathbf{k})$ による表現が用いられることになる．

最後に，この描像での相互作用ハミルトニアン $H_{\text{I}}(t)$ について次の点を強調しておこう：ハミルトニアン密度は (20) 式からもわかるように場の演算子とその空間微分の関数（多項式）だから

$$\begin{aligned}H_{\text{I}}(t) &= e^{iH_0(t-t_0)} H_{\text{I}} e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= \int d^3\mathbf{x} e^{iH_0(t-t_0)} \mathcal{H}_{\text{I}}(\pi(\mathbf{x}, t_0), \phi(\mathbf{x}, t_0), \partial_i\phi(\mathbf{x}, t_0)) e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H}_{\text{I}}(\pi_{\text{T}}(\mathbf{x}, t), \phi_{\text{T}}(\mathbf{x}, t), \partial_i\phi_{\text{T}}(\mathbf{x}, t))\end{aligned}\quad (102)$$

である．つまり， $H_{\text{I}}(t)$ は自由場のハイゼンベルグ演算子だけで表される．これはこの描像の非常に大きな利点と言える．

9．共変摂動論で計算する量

素粒子現象に関する代表的な問題は散乱（Scattering）または衝突（Collision）過程と束縛状態（Bound state）である．特に，高エネルギー加速器実験などは前者の典型例であるし，構造を持たないレプトン（Lepton）の崩壊（Decay）なども前者に含めることが出来る．これは二つの粒子 P_1, P_2 が衝突し，その結果 n 個の粒子 P'_1, P'_2, \dots, P'_n が生成されるような過程や，一つの粒子 P が n 個の粒子に壊れていくような過程（ n 体崩壊）である．これに対して後者はハドロン（Hadron）がクォーク（Quark）からどのように構成されているか，といった問題であり，また，ハドロンの崩壊もこの束縛問題と無関係ではない．しかしながら，その取り扱いが摂動論の守備範囲外であって大変複雑で難しいので，この講義では散乱問題の摂動計算に話を限定することにする．

素粒子実験では，始状態として運動量が確定した粒子群（ビーム）を準備し，反応後（終状態）もやはり運動量が確定した生成粒子を調べるとするのが一般的である．従って，実験結果

の解析のためには、運動方程式の解の完全系として運動量の確定状態を取り、それからすべての状態を対応する生成演算子と真空状態 $|0\rangle$ を用いて構成し、それらの時間発展や他の状態への遷移の確率振幅

$$A(\Psi_i \rightarrow \Psi_f)$$

などを計算するという手順が必要となる。

10. 相対論的場の量子論での S 行列

必要な計算についてもう少し具体的に説明しよう。上記のように素粒子反応の計算は時刻 $t = t_i = -\infty$ の始状態 Ψ_i (反応前の自由状態) が、相互作用の後に時刻 $t = t_f = +\infty$ でどのような終状態 Ψ_f (反応後の自由状態) に変化するかを調べる形で行われる。^{#12} そこで、この節では出発点となる量子化の時刻 t_0 を $t = t_i$ にとることにする。すると、散乱の始状態 $|P_1(\mathbf{p}_1)P_2(\mathbf{p}_2)\rangle$ は場 $\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t_i)$ の生成演算子を用いて $a_1^\dagger(\mathbf{p}_1)a_2^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle$ と、また崩壊の場合の始状態 $|P(\mathbf{p})\rangle$ は $a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ と構成される。この系が時刻 $t = +\infty$ でどう変化しているかを表すのが S 行列 (S matrix) である。

始めにシュレディンガー描像で考えてみよう (但し、添字 S は略す)。すでに説明したように、この描像では、状態の変化を表す方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

である。これを $|\Psi(t = t_i)\rangle = |\Psi_i\rangle$ という境界条件で解くと (形式的ながら) 時刻 $t = t_f (= +\infty)$ における状態が

$$|\Psi(t_f)\rangle = e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle \quad (103)$$

と得られ、これより $\Psi_i \rightarrow \Psi_f$ という遷移の確率振幅が

$$\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle = \langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle \quad (104)$$

と与えられる。さて、ここで仮りに相互作用が全くなかったとしてみよう。すると系が始めに定常状態にあれば、それ以後何の変化も起こらず、 $\Psi_i \rightarrow \Psi_f$ の確率振幅も単に $\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle$ のはずだが、実際に上式で $H = H_0$ とすると $|\Psi_i\rangle$ のエネルギーを E_i として

$$\langle\Psi_f|e^{-iH_0(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle = e^{-iE_i(t_f-t_i)}\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle$$

^{#12} 始めの時刻が $t = -\infty$ で終りの時刻が $t = +\infty$ と言っても、もちろん数学的な意味での無限大などではない。しかしながら、反応は正に一瞬のうちに起こるので、実質的には非常によい近似でこのように扱うことが出来る。

となり, $e^{-iE_i(t_f-t_i)}$ という余計な因子が出てしまう. これは $|\langle \Psi_f | \Psi(t_f) \rangle|^2$ の計算には効かない単なる位相因子だが, それでも無い方が自然だろう. そこで, この因子を取り除くために $e^{iH_0(t_f-t_i)}$ という演算子を用いて

$$S = e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (105)$$

と定義すれば, これは系の $|\Psi_i\rangle \rightarrow |\Psi(t_f)\rangle$ という時間発展を記述し, かつ $H_I = 0$ の時には

$$S = 1$$

つまり余分な位相因子を出さない演算子となる. これが摂動論的な場の理論で中心的な役割を果たす S 行列演算子である. この演算子はユニタリ

$$SS^\dagger = 1 \quad (106)$$

であることはその定義 (105) より明らかだろう.

この S 行列は “漸近場 (Asymptotic field)” という概念を用いると, もっとエレガントに定式化できる. これについて簡単に説明しておこう. 但し, 厳密な議論には立ち入らないことにする. 今度の出発点はハイゼンベルグ場 $\phi(x)$ である. 時刻 $t \rightarrow \pm\infty$ では束縛状態を考えない限り各粒子はお互い遠く離れ自由な状態になっている訳だから, $\phi(x)$ もある自由なハイゼンベルグ場に一致するはずである. そのような自由ハイゼンベルグ場は漸近場と呼ばれ, $t \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ に対応してそれぞれ $\phi_{\text{in}}(x)$, $\phi_{\text{out}}(x)$ と表される:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} [\phi(x) - \phi_{\text{in}}(x)] = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} [\phi(x) - \phi_{\text{out}}(x)] = 0 \quad (107)$$

この漸近場を

$$\phi_{\text{in}}(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{p}} [a_{\text{in}}(\mathbf{p})e^{-ipx} + a_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}] \quad (108)$$

$$\phi_{\text{out}}(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{p}} [a_{\text{out}}(\mathbf{p})e^{-ipx} + a_{\text{out}}^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}] \quad (109)$$

と展開し, そこに含まれる生成演算子 $a_{\text{in,out}}^\dagger(\mathbf{p})$ から構成される状態をそれぞれ $|\Psi, \text{in}\rangle$, $|\Psi, \text{out}\rangle$ のように書く. これを用いて $|\alpha, \text{in}\rangle \rightarrow |\beta, \text{out}\rangle$ という変化を記述する S 行列 (の $(\beta\alpha)$ 成分) が

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle \quad (110)$$

と, また, S 行列演算子が

$$\langle \beta, \text{out} | = \langle \beta, \text{in} | S \quad (111)$$

と定義されるのである。

では，このように導入された S 行列演算子は $S = e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}$ と同じものだろうか？
これを確かめるために，まず $\phi_{\text{in,out}}(x)$ の関係を調べよう．その定義から

$$\phi_{\text{out}}(\mathbf{x}, t_f) = e^{iH(t_f-t_i)}\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_i)e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (112)$$

であるが， $\phi_{\text{in}}(x)$ という自由ハイゼンベルグ場自身の時間発展は e^{-iH_0t} で決まるから

$$\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_i) = e^{-iH_0(t_f-t_i)}\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_f)e^{iH_0(t_f-t_i)} \quad (113)$$

従って，

$$\begin{aligned} \phi_{\text{out}}(\mathbf{x}, t_f) &= e^{iH(t_f-t_i)}e^{-iH_0(t_f-t_i)}\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_f)e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)} \\ &= [e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}]^{-1}\phi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_f)e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)} \end{aligned}$$

より

$$a_{\text{out}}(\mathbf{p}) = [e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}]^{-1}a_{\text{in}}(\mathbf{p})e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)} \quad (114)$$

が得られる．一方，漸近場による S 行列の定義より

$$\begin{aligned} \langle \beta, \text{out} | a_{\text{out}}(\mathbf{p}) | \alpha, \text{in} \rangle &= \langle \beta, \text{in} | S a_{\text{out}}(\mathbf{p}) | \alpha, \text{in} \rangle \\ \langle \beta, \text{out} | a_{\text{out}}(\mathbf{p}) | \alpha, \text{in} \rangle &= \langle \beta, \mathbf{p}, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle \\ &= \langle \beta, \mathbf{p}, \text{in} | S | \alpha, \text{in} \rangle = \langle \beta, \text{in} | a_{\text{in}}(\mathbf{p}) S | \alpha, \text{in} \rangle \end{aligned}$$

となるが，ここで $|\alpha, \text{in}\rangle, |\beta, \text{in}\rangle$ は任意の状態だから，結局

$$a_{\text{out}}(\mathbf{p}) = S^{-1}a_{\text{in}}(\mathbf{p})S \quad (115)$$

従って (114) 式と (115) 式を比べれば，確かに漸近場による定義においても

$$S = e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}$$

が成立していることが理解出来る。^{#13}

なお， $\langle \beta, \text{in} | S | \alpha, \text{in} \rangle$ においては $|\alpha, \text{in}\rangle, |\beta, \text{in}\rangle$ とともに $a_{\text{in}}^\dagger(\mathbf{p})$ から構成されているが，ここまでの説明からわかるように，それは実質的にはシュレディンガー描像の生成演算子 $a^\dagger(\mathbf{p})$ に等しいので，漸近場による議論と言っても特別なことを考える必要はない．

^{#13}他の多くの教科書では $t = 0$ が基準（量子化の時刻）として選ばれているが，その場合には $S = e^{iH_0t_f}e^{-iH(t_f-t_i)}e^{-iH_0t_i}$ となる．

これ以降は $\Psi_i \rightarrow \Psi(t_f)$ という状態の時間発展および $\Psi_i \rightarrow \Psi_f$ という遷移の確率振幅 \mathcal{A} としては、それぞれ (103) と (104) ではなく、そこから観測には全く影響を与えない位相因子を除いた

$$|\Psi(t_f)\rangle = S|\Psi_i\rangle \quad (= e^{iH_0(t_f-t_i)} e^{-iH(t_f-t_i)} |\Psi_i\rangle) \quad (116)$$

$$\mathcal{A}(\Psi_i \rightarrow \Psi_f) = \langle \Psi_f | \Psi(t_f) \rangle \quad (= \langle \Psi_f | S | \Psi_i \rangle) \quad (117)$$

を用いることにする (ここで、 $|\Psi_{i,f}\rangle$ は共に $a^\dagger(p)$ から構成される)。勿論、この変更はこれまで考えてきた物理量には何の本質的影響も与えない。

1 1 . 伝播関数と時間順序積

摂動計算で不可欠な役割を果たすもう一つの量は伝播関数 (Propagator) である。これはスカラー場の場合にはよく $\Delta_F(x)$ と表されるが、その定義は

$$\Delta_F(x-y) = i\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (118)$$

である。^{#14} ここで $\phi(x)$ としては相互作用も含めたハイゼンベルグ場が用いられることもあるが、摂動計算には必要ないのでここでは自由ハイゼンベルグ場をとる。また、 T は時間順序積 (あるいは T 積: Time-ordered product) であり、複数の時間依存演算子を時間順序に並べることが意味する。例えば $y^0 > z^0 > x^0$ ならば

$$T[A(x)B(y)C(z)] = B(y)C(z)A(x)$$

である。但し、フェルミ演算子の場合には順序を 1 回交換する度にマイナス符号を付ける (この例では 2 回交換があるのでフェルミ演算子でも符号はこのまま)。これは階段関数 $\theta(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} T[A(x)B(y)C(z)] &= A(x)B(y)C(z)\theta(x^0 - y^0)\theta(y^0 - z^0) + A(x)C(z)B(y)\theta(x^0 - z^0)\theta(z^0 - y^0) \\ &+ B(y)A(x)C(z)\theta(y^0 - x^0)\theta(x^0 - z^0) + B(y)C(z)A(x)\theta(y^0 - z^0)\theta(z^0 - x^0) \\ &+ C(z)A(x)B(y)\theta(z^0 - x^0)\theta(x^0 - y^0) + C(z)B(y)A(x)\theta(z^0 - y^0)\theta(y^0 - x^0) \end{aligned}$$

^{#14} 虚数単位 i を付けない定義やマイナス符号を付ける定義もある。ここで右辺は実際に $x-y$ にしか依存しないことを確認すること。

と表すことが出来る。但し、階段関数とは記法のところにも書いたように $\theta(x > 0) = 1$, $\theta(x = 0) = 1/2$, $\theta(x < 0) = 0$ と定義される関数で、微分するとデルタ関数になるという性質を持つ。

後の説明のため、より一般的な式を与えておこう：

$$\begin{aligned} & T[A_1(x_1)A_2(x_2) \cdots A_n(x_n)] \\ &= \sum_P A_{p(1)}(x_{p(1)})A_{p(2)}(x_{p(2)}) \cdots A_{p(n)}(x_{p(n)}) \\ & \quad \times \theta(x_{p(1)}^0 - x_{p(2)}^0)\theta(x_{p(2)}^0 - x_{p(3)}^0) \cdots \theta(x_{p(n-1)}^0 - x_{p(n)}^0) \end{aligned} \quad (119)$$

ここで、 $p(1), p(2), \dots, p(n)$ は $1, 2, \dots, n$ の並べ変えであり、 \sum_P はすべての異なる並べ変え ($n!$ 通り) についての和を表す。

上で導入した $\Delta_F(x)$ は、 $\phi(x)$ がクライン-ゴルドン方程式 $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ を満たす場なら、クライン-ゴルドン演算子 $(\square + m^2)$ のグリーン (Green) 関数にもなっている：

$$(\square + m^2)\Delta_F(x) = \delta^4(x) \quad (120)$$

実際、

$$\begin{aligned} \partial^\mu T[\phi(x)\phi(0)] &= \partial^\mu [\phi(x)\phi(0)\theta(x^0) + \phi(0)\phi(x)\theta(-x^0)] \\ &= [\partial^\mu \phi(x)] \phi(0)\theta(x^0) + \phi(x)\phi(0)\partial^\mu \theta(x^0) \\ & \quad + \phi(0)[\partial^\mu \phi(x)] \theta(-x^0) + \phi(0)\phi(x)\partial^\mu \theta(-x^0) \end{aligned}$$

において、量子化条件の同時刻交換関係および $d\theta(x)/dx = \delta(x)$ を用いると

$$\begin{aligned} \text{右辺第 2 項} + \text{第 4 項} &= \delta_{\mu 0} [\phi(x)\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)\phi(x)\delta(x^0)] \\ &= \delta_{\mu 0}\delta(x^0)[\phi(x), \phi(0)] = 0 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} T[\phi(x)\phi(0)] &= \partial_\mu \partial^\mu T[\phi(x)\phi(0)] \\ &= [\square \phi(x)] \phi(0)\theta(x^0) + [\partial^\mu \phi(x)] \phi(0)\partial_\mu \theta(x^0) \\ & \quad + \phi(0)[\square \phi(x)] \theta(-x^0) + \phi(0)[\partial^\mu \phi(x)] \partial_\mu \theta(-x^0) \end{aligned}$$

となり、これより導かれる関係

$$(\square + m^2)T[\phi(x)\phi(0)]$$

$$\begin{aligned}
&= [(\partial^\mu + m^2)\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0) + [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0) \\
&+ \phi(0)[(\partial^\mu + m^2)\phi(x)]\theta(-x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0) \\
&= [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0) \\
&= [\partial^0\phi(x)]\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)[\partial^0\phi(x)]\delta(x^0) = \dot{\phi}(x)\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)\dot{\phi}(x)\delta(x^0) \\
&= [\pi(x), \phi(0)]\delta(x^0) = -i\delta^3(\mathbf{x})\delta(x^0) = -i\delta^4(x)
\end{aligned}$$

を真空状態で挟んで (120) 式が得られる .

摂動計算に頻繁に顔を出すのはこのフーリエ展開

$$\Delta_F(q) = \int d^4x e^{iqx} \Delta_F(x) \quad (121)$$

の方である . これは複素積分により

$$\Delta_F(q) = \frac{1}{m^2 - q^2 - i\varepsilon} \quad (122)$$

となることを示すことが出来る.^{#15} 但し, $\varepsilon(> 0)$ はすべての計算が完了したら 0 と置く微小定数 (いわゆる無限小定数) である.^{#16} 実際, $aa, a^\dagger a, a^\dagger a^\dagger$ は真空状態で挟むと皆 0 になることを用いると

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\mathbb{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\
&= \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle\theta(x^0 - y^0) + \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle\theta(y^0 - x^0) \\
&= \int d^3\tilde{\mathbf{p}} d^3\tilde{\mathbf{q}} [\langle 0|a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle e^{-i(px-qy)}\theta(x^0 - y^0) \\
&\quad + \langle 0|a(\mathbf{q})a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle e^{i(px-qy)}\theta(y^0 - x^0)] \\
&= \int d^3\tilde{\mathbf{p}} [e^{-ip(x-y)}\theta(x^0 - y^0) + e^{ip(x-y)}\theta(y^0 - x^0)] \quad (123)
\end{aligned}$$

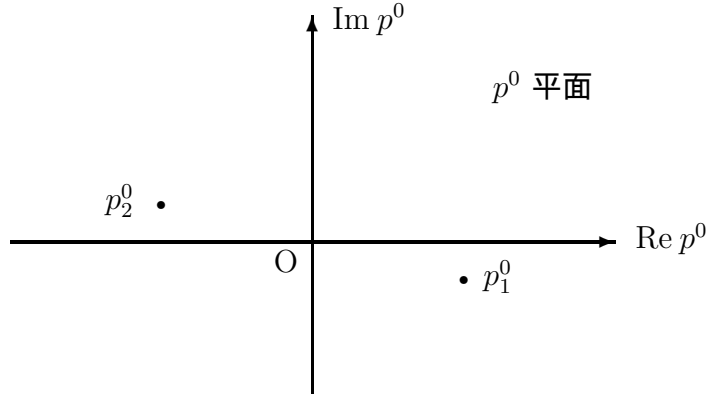
となるが, 一方

$$\frac{e^{-ip(x-y)}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}$$

は p^0 複素平面上において次図に示すような点 $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - i\varepsilon (\equiv p_1^0)$ と $p^0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + i\varepsilon (\equiv p_2^0)$ に極を持つ :

^{#15} この 4 元運動量 q には何の制限も付いていないため, 一般には $q^2 \neq m^2$ である . このような状態はオフシェル (Off shell) と言われる . 一方, 直接観測にかかる粒子の運動量は当然 $q^2 = m^2$ を満たさなければならない . その場合はオンシェル (On shell) と呼ばれる .

^{#16} 無限小定数なのでこれに有限の因子を掛けたり割ったりしたものも同じく ε と書かれる .



ここで $e^{-ip(x-y)}$ は $x^0 - y^0 > 0$ の時には $\text{Im } p^0 < 0$ の半径無限大の半円（下半面）で、また $x^0 - y^0 < 0$ の時には $\text{Im } p^0 > 0$ の半径無限大の半円（上半面）で 0 になることを用いて

$$\int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon}$$

の中の p^0 積分路をそれぞれ下半円一周，上半円一周に広げ，そこでコーシー（Cauchy）の積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{z - a}$$

（但し，積分路 C は閉曲線でその向きは反時計回り， a は C 内部の点）を適用すると（123）式に一致する結果が得られる．

最後に時間微分項を含む T 積についての注意をしておこう．この積の定義にそのまま従えば，例えば

$$T[\dot{A}(x)B(y)] = \dot{A}(x)B(y)\theta(x^0 - y^0) + B(y)\dot{A}(x)\theta(y^0 - x^0)$$

となる訳だが，これとは別に

$$T^*[\dot{A}(x)B(y)] \equiv \frac{\partial}{\partial x^0} T[A(x)B(y)] \tag{124}$$

として時間微分は T 積の左側に出してしまう定義もある．これは共变的時間順序積（Covariant time-ordered product）あるいは T^* 積と呼ばれることもあるが，明らかに時間微分が階段関数に作用する分だけ両者に差が生じる．実は T^* 積の方が摂動計算には有用であることが後でわかるので，このノートでは特に断わらない限り T 積はこの T^* 積を意味するものとする．但し，伝播関数の定義にはこの差は無関係であることは明らかだろう．

12. 朝永-ディラック描像と S 行列

S 行列に話を戻そう。\$S = e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}\$ という形では具体的な計算をどうやって進めたいのかわからない。そこで前の説明を見る。朝永-ディラック描像では、状態の時間発展は (96) 式

$$|\Psi(t)\rangle_T = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

に従うが、これは正に S 行列演算子による時間発展に一致している。つまり、朝永-ディラック描像はこの演算子にとって自然な描像だったのである。更に、これは

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_T = H_I(t)|\Psi(t)\rangle_T \quad (125)$$

((97) 式) という微分方程式に書き直せること、そしてこの描像での相互作用ハミルトニアン \$H_I(t)\$ は自由なハイゼンベルグ場で表されることも思い出そう。これ以降は特に断わらない限り、演算子も状態ベクトルも朝永-ディラック描像のものなので添字 T はすべて省略する。

方程式 (125) の両辺を時刻 \$t_0\$ から \$t\$ まで積分すると

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle + (-i)\int_{t_0}^t dt' H_I(t')|\Psi(t')\rangle \quad (126)$$

となる。勿論これで解が求まった訳ではないが、相互作用が強くない、つまり \$H_I\$ が微小定数を含む場合にはこれを逐次近似法 (Successive approximation) で解くことが出来る。まず第 0 次近似として \$H_I = 0\$ と置く。すると上の式は

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

となる。これを (126) の右辺の \$|\Psi(t)\rangle\$ に代入すると

$$|\Psi(t)\rangle = \left[1 + (-i)\int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) \right] |\Psi(t_0)\rangle$$

これをまた (126) の右辺の \$|\Psi(t)\rangle\$ に代入すると

$$|\Psi(t)\rangle = \left[1 + (-i)\int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) \right] |\Psi(t_0)\rangle$$

これを繰り返すと

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \left[1 + (-i)\int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) \right. \\ & + \dots\dots\dots \\ & + (-i)^n\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \\ & \left. + \dots\dots\dots \right] |\Psi(t_0)\rangle \quad (127) \end{aligned}$$

この中の第 n 次の積分項に注目しよう．各積分の上端・下端からわかるように，積分変数 t_1, t_2, \dots, t_n の大小関係は常に $t > t_1 > t_2 > \dots > t_{n-1} > t_n > t_0$ である．ここで被積分関数に階段関数の積 $\theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\theta(t_3 - t_4)\cdots\theta(t_{n-1} - t_n)$ を掛けてやれば，積分の値は変えることなくすべての積分の上限を t にそろえることができる：

$$(-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) \\ \times \theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_3)\cdots\theta(t_{n-1} - t_n)$$

次に，積分変数にはどんな文字を使ってもいいのだから t_1, t_2, \dots, t_n を $t_{p(1)}, t_{p(2)}, \dots, t_{p(n)}$ で置き換える ($t_{p(1)}, t_{p(2)}, \dots, t_{p(n)}$ は t_1, t_2, \dots, t_n を適当に並べ変えたもの)．すべての積分の上端・下端は同じ t, t_0 になっているので，各積分の順序は自由に交換出来，常に左から t_1 積分， t_2 積分， \dots としておける：

$$(-i)^n \int_{t_0}^t dt_{p(1)} \int_{t_0}^t dt_{p(2)} \cdots \int_{t_0}^t dt_{p(n)} H_I(t_{p(1)})H_I(t_{p(2)}) \cdots H_I(t_{p(n)}) \\ \times \theta(t_{p(1)} - t_{p(2)})\theta(t_{p(2)} - t_{p(3)})\cdots\theta(t_{p(n-1)} - t_{p(n)}) \\ = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n H_I(t_{p(1)})H_I(t_{p(2)}) \cdots H_I(t_{p(n)}) \\ \times \theta(t_{p(1)} - t_{p(2)})\theta(t_{p(2)} - t_{p(3)})\cdots\theta(t_{p(n-1)} - t_{p(n)})$$

この並べ変え (順序交換) P は全部で $n!$ 通りある．それらをすべて足し合わせ全体を $n!$ で割ったものは，当然のことながら元の積分の値に等しい．一方で，この時の足し合わされた被積分関数の全体

$$\sum_P H_I(t_{p(1)})H_I(t_{p(2)}) \cdots H_I(t_{p(n)}) \\ \times \theta(t_{p(1)} - t_{p(2)})\theta(t_{p(2)} - t_{p(3)})\cdots\theta(t_{p(n-1)} - t_{p(n)})$$

は (119) と見比べれば $T[H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)]$ そのものであることがわかる.^{#17} だから (127) は

$$|\Psi(t)\rangle = \left[1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T[H_I(t_1)H_I(t_2)] \right. \\ + \cdots \\ + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T[H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)] \\ \left. + \cdots \right] |\Psi(t_0)\rangle \quad (128)$$

^{#17} 仮にフェルミオンが関与していても，通常の相互作用ではフェルミオン数は保存される，つまり $H_I(t)$ の中には $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ が同じ数だけ含まれているので，全体の符号はこのままでよい．

と表せる .

さて , ここでは $t = t_i = -\infty$ の初期状態が $t = t_f = +\infty$ でどんな状態に遷移するかを考えるのだから , (128) 式で $t_0 = -\infty, t = +\infty$ と置こう . 一方 , $|\Psi(+\infty)\rangle$ と $|\Psi(-\infty)\rangle$ は (116) により

$$|\Psi(+\infty)\rangle = S|\Psi(-\infty)\rangle \quad (129)$$

と関係付けられている . 従って , S 行列について

$$\begin{aligned} S &= 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(n)} + \dots \\ &= 1 + (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 T[H_I(t_1)H_I(t_2)] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n T[H_I(t_1)H_I(t_2) \dots H_I(t_n)] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (130)$$

或いは , ハミルトニアン密度を用いて

$$\begin{aligned} S &= 1 + (-i) \int d^4x_1 \mathcal{H}_I(x_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 T[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \dots \int d^4x_n T[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (131)$$

という摂動展開表現を得る . この時 , 4次元積分の積分領域は全時空である . また , 状態 $|\Psi(-\infty)\rangle$ と $|\Psi(+\infty)\rangle$ は , 共に時間に依存しない生成演算子 $a^\dagger(\mathbf{p})$ から構成されるのだから , $H_I(t)$ に含まれる場の演算子も (101) で与えたように $a^{(\dagger)}(\mathbf{p})$ による表現

$$\phi_T(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx} \right]$$

を用いるのが便利である .

ここで相互作用が微分結合 (Derivative coupling) を含まない場合を考えてみよう . すると

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}_0(\phi, \partial_\mu\phi) + \mathcal{L}_I(\phi), \quad \pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\phi}}$$

より

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \dot{\phi}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\phi}} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_I = \mathcal{H}_0 - \mathcal{L}_I$$

となるから

$$\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) \quad (132)$$

従って，S行列は

$$\begin{aligned} S &= 1 + i \int d^4x_1 \mathcal{L}_I(x_1) + \frac{i^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2)] + \dots \\ &\equiv T \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right] \end{aligned} \quad (133)$$

と書き換えることが出来る．但し，第2の式（expの式）は，第1の式を形式的にまとめて表したものである．

もし \mathcal{L}_I が微分結合を含むなら

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}}$$

となり，結果として

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L}_I$$

より

$$\mathcal{H}_I = \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L}_I \neq -\mathcal{L}_I$$

となってしまう，上式のようにSを $\mathcal{L}_I(x)$ で表すことは出来ないように思われる．しかし，実際には相互作用が繰り込み可能（Renormalizable）である時にはT積を T^* 積のことと理解しておけば

$$S = T \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right]$$

がやはり成立することが知られている。^{#18}

相互作用が小さくないならば，結局この場合も無限級数の足し上げが必要となってしまうが，もし \mathcal{L}_I が微小定数に比例するなら，上記の級数の始めの幾つかの項を計算するだけでよい近似が得られると期待出来る．つまり摂動計算が有効になるが，この場合は相対論的な計算なので共変摂動論（Covariant perturbation theory）と呼ばれる．これを具体的に実行するのが場の量子論の重要なテーマの一つである．

^{#18} $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I + [\text{差額}]$ とすると，この「差額」とT積を T^* 積と読み換える時に現われる「差額」とが打ち消し合ってしまうのである．詳しくは例えば「Quantum Field Theory」(C. Itzykson, J-B. Zuber, McGraw-Hill Inc.) の 6-1-4 節参照．

1 3 . 断面積と崩壊幅

ここまでの結果を用いれば反応の確率振幅が求められ、これを実験結果と比較することにより、作用した相互作用の強さや性質を調べることが出来る。しかし、すでに述べたように、実際の実験では粒子 1・2 のビーム同士が、或いは多数の固定標的（粒子 2）に粒子 1 のビームがぶつけられる訳で、反応は 1 回だけ起こるのではない。従って、ビーム強度なども考慮しないと正確な情報を引き出すことは出来ない。そこで、このような実験条件も含め、もっと厳密に反応の起こる確率を定義しておく必要がある。ここで登場する重要な量が散乱（衝突）断面積（Scattering cross section）と崩壊幅（Decay width）である。

断面積の定義

粒子 1, 2 の（ビーム内）個数密度を ρ_1, ρ_2 , 両者が衝突する時の相対速度の大きさを v_{rel} とし、実際の衝突が時間 T , 体積 V の中で N 回起こったとする。この時、この衝突の断面積 σ は

$$\sigma = N/(VT\rho_1\rho_2v_{\text{rel}}) \quad (134)$$

と定義される。また、終状態として特別な状態、例えば入射粒子がビーム方向に対して角度 θ と $\theta + d\theta$ の間に散乱される状態、のみに着目する場合には反応の回数も微小になるはずなので N, σ をそれぞれ $dN, d\sigma$ と書き改め

$$d\sigma = dN/(VT\rho_1\rho_2v_{\text{rel}}) \quad (135)$$

として、この $d\sigma$ 或いは $d\sigma/d\theta$ を（この方向への）微分断面積（Differential cross section）と呼ぶ。

断面積は、その名が示すように、また (134) 式からもわかる通り、通常単位系では面積の次元を持ち、具体的には「1 個の標的（粒子 2）に対し、それを含む面に垂直に、単位面積当たり 1 個の粒子（粒子 1）が入射した時に衝突が起こる確率」を表す。実際、入射粒子 1 の個数密度は ρ_1 だから、時間 T の間に各単位面積に到達するのは、高さが $v_{\text{rel}}T$ でその単位面積を底面とする領域の内部にいる $\rho_1 v_{\text{rel}}T$ 個である。すると、これにより衝突は $\rho_1 v_{\text{rel}}T\sigma$ 回起こることになるが、体積 V の空間内には標的の粒子 2 も $\rho_2 V$ 個存在するから、全衝突回数は結局 $N = \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} VT\sigma$ となり、断面積の定義 (134) に一致する。

この断面積を S 行列および実際に測定されるエネルギー・運動量で表現しよう。そのために、まず、 v_{rel} を粒子 1, 2 の運動量と質量で書き表そう：一般には v_1, v_2 の関係には何の制限もないが、ここでは実用上特に重要な重心系および粒子 2 が静止している実験室系に話を限る。

すると v_1, v_2 は (反) 平行 ($v_2 = 0$ の場合も含む) となるので,

$$v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{p}_1/p_1^0 - \mathbf{p}_2/p_2^0| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} / (p_1^0 p_2^0) \quad (136)$$

を得る。^{#19}

次に、個数密度について考える。このノートでは 1 粒子状態は $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ と規格化されているから

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle &= (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(0) = 2p^0 \int d^3 \mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{p}=0} \\ &= 2p^0 \int d^3 \mathbf{x} = 2p^0 V_{\text{全空間}} \end{aligned} \quad (137)$$

となる。 $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle$ は 1 粒子波動関数を用いて

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x} |\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})|^2$$

と表せることからわかるように、全空間に存在する粒子の総数を与えるから (137) は $|\mathbf{p}\rangle$ が個数密度 $2p^0$ の状態を表すことを示している。

ここで量子力学での重ね合せの原理を思い出そう。任意の状態 $|\Psi\rangle$ はエネルギーや運動量といった物理量の固有状態 $|q_i\rangle$ で $|\Psi\rangle = \sum_i c_i |q_i\rangle$ と展開出来、すべての状態がノルム = 1 と規格化されていれば、 $|c_i|^2 (= |\langle q_i | \Psi \rangle|^2)$ は $|\Psi\rangle$ が $|q_i\rangle$ という状態に見出される確率と解釈される。事実、固有状態 $|q_i\rangle$ の完全性条件 $\sum_i |q_i\rangle \langle q_i| = 1$ を用いれば

$$\sum_i |c_i|^2 = \sum_i \langle \Psi | q_i \rangle \langle q_i | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle = 1$$

となり確率解釈 (すべての確率の和 = 1) が可能であることがわかる。では、 $\langle \Psi | \Psi \rangle = N$ (1 粒子状態なら全粒子数、一般には実現されている状態の総数)、 $\langle q_i | q_j \rangle = a_i \delta_{ij}$ と規格化されている場合はどうなるだろうか。この場合は、完全性条件は $\sum_i a_i^{-1} |q_i\rangle \langle q_i| = 1$ である。従って $|\Psi\rangle$ の $|q_i\rangle$ による展開は

$$|\Psi\rangle = \sum_i c'_i |q_i\rangle \quad c'_i = \frac{1}{a_i} \langle q_i | \Psi \rangle$$

ここで $\langle \Psi | \Psi \rangle (= N)$ を考えてみると

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= \sum_i \sum_j c_i'^* c_j' \langle q_i | q_j \rangle = \sum_i \sum_j c_i'^* c_j' a_i \delta_{ij} \\ &= \sum_i a_i |c_i'|^2 = \sum_i \frac{1}{a_i} |\langle q_i | \Psi \rangle|^2 = N \end{aligned}$$

^{#19} 実は、一般の場合には逆に (136) 式の右辺が v_{rel} の「定義」として用いられる。

となるので、 $a_i^{-1}|\langle q_i|\Psi\rangle|^2$ が状態 $|q_i\rangle$ に見出される粒子の個数あるいはその状態の数であることがわかる。

これを参考にすれば、衝突の回数を S 行列で表すことが出来る：状態の規格化は $\langle p|p'\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ だから、 $(2\pi)^3 2p^0$ が上に示した量子力学の例での a_i に対応する。従って、例えば 1 粒子状態についての完全性条件は

$$\int d^3\tilde{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| = 1$$

となる。^{#20} 一般に n 粒子状態についても同様に考えることが出来る。ここで、粒子 1・2 の衝突の結果、質量・運動量が $(M_1, \mathbf{q}_1) \cdots (M_n, \mathbf{q}_n)$ の粒子が生成されたとしよう。 S 行列の定義より、この始状態 $|\alpha\rangle (= |\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle)$ は反応後には $|\Psi\rangle = S|\alpha\rangle$ という状態になっている。 n 粒子状態の完全性条件を考えれば、この $|\Psi\rangle$ は

$$|\Psi\rangle = \int \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i |\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n\rangle \langle \mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n | \Psi \rangle \quad (138)$$

と展開される。これを見れば、反応により生成されたいろいろな終状態の中で、各粒子の運動量がそれぞれ \mathbf{q}_i と $\mathbf{q}_i + d^3\mathbf{q}_i$ の間に入っている状態の数、つまりはそのような反応の起こった回数は

$$dN = \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i |\langle \beta | S | \alpha \rangle|^2 \quad (139)$$

であることがわかる。但し、簡単のため、 $|\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n\rangle$ を $|\beta\rangle$ と表した。

ここで一つ断わっておこう。厳密に言えば、 $\alpha \rightarrow \beta$ という反応の中には「無反応」つまり $\alpha = \beta$ という場合も含まれているはずなので、本質的にはその部分を除いた $S - 1$ が反応を記述する演算子ということになるが、 $\alpha \neq \beta$ であればこの -1 は全く計算には寄与しないので、このまま S を用いて話を進める。

さて、全エネルギー・運動量 P は反応の前後で保存されるから $\langle \beta | S | \alpha \rangle$ の中には $\delta^4(P_\beta - P_\alpha)$ という因子が含まれている。それを抜き出して

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \mathcal{M}_{\beta\alpha} \quad (140)$$

と表す。この $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ は不変散乱振幅 (Invariant scattering amplitude) と呼ばれている。この表現を用いると

$$|\langle \beta | S | \alpha \rangle|^2 = |(2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$$

^{#20} この式の右辺の 1 は、あくまで 1 粒子状態で挟んだ場合の話である。これを無視して、例えば 2 粒子状態で両辺を挟むと、左辺は明らかに 0 なのに右辺はその 2 粒子状態のノルムとなり矛盾が生じるように見えてしまう。

の右辺で $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ を除く部分は

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) &= (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) (2\pi)^4 \delta^4(0) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \int d^4x = VT (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \end{aligned}$$

($\int d^4x = VT$ は反応に関与する全時空体積) となるので,

$$dN = VT \prod_{i=1}^n d^3 \tilde{\mathbf{q}}_i (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (141)$$

が得られる。これを, すでに調べた相対速度の大きさ (136) や個数密度の表現 (137) と共に (135) 式に代入し, 最終的に $\alpha \rightarrow \beta$ という反応の微分断面積として

$$d\sigma = \prod_{i=1}^n d^3 \tilde{\mathbf{q}}_i \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \quad (142)$$

を得る。また, これを積分することにより全断面積 (Total cross section)

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n d^3 \tilde{\mathbf{q}}_i \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \quad (143)$$

が得られる。但し, 終状態の中に同種粒子が n_1 個, n_2 個, \dots ある場合には全体を $n_1! n_2! \dots$ で割る必要がある。これは, 例えば 1 と 2 が同種である場合, それぞれの運動量が q, q' である場合と q', q である場合が原理的に区別不可能で全く同じ終状態を与えるため, $q_{1,2}$ 両方についてすべての積分領域で積分を実行すると, その同じ状態を 2 度数えてしまうことになるからである。^{#21}

実際の実験では, 終状態の粒子すべてについて, 同時に詳しく調べることは簡単ではない。特に, 多数のクォーク (ハドロン) が生成される場合などは, そのような分析は不可能なことも少なくない。むしろ終状態の特定の粒子一つか二つに注目し, それ以外の粒子の状態については和をとる (積分する) といった分析の方が普通である。例えば, 上の式で終状態の粒子 1 が $(q_1, q_1 + d^3 q_1)$ という運動量の区間に生成される断面積は

$$\frac{d\sigma}{d^3 \tilde{\mathbf{q}}_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \tilde{\mathbf{q}}_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \tilde{\mathbf{q}}_n \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \quad (144)$$

である。

^{#21} 実は, 多くの教科書では, 微分断面積の段階ですでに $1/(n_1! n_2! \dots)$ を含めている。定義の問題だから深く議論してもあまり意味はないが, 少なくとも筆者の個人的な見解では, この因子 (統計因子: Statistical factor) は含めない方が微分断面積の本来の意味に合致すると思う。

この式は, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ といった 2 体反応を重心系で記述する場合には, 特に簡単な形になる. 実際, q_2 積分は 4 次元デルタ関数の中の空間部分 $\delta^3(\mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\alpha)$ のため直ちに完了する:

$$\frac{d\sigma}{d^3\tilde{\mathbf{q}}_1} = \frac{1}{(2\pi)^3 2q_2^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta(P_\beta^0 - P_\alpha^0) \quad (145)$$

ここで $P_\beta^0 = q_1^0 + q_2^0 = \sqrt{\mathbf{q}_1^2 + M_1^2} + \sqrt{\mathbf{q}_2^2 + M_2^2}$ および $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ の中のすべての q_2 は実行した 3 次元デルタ関数積分により $q_2 = \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1$ (重心系では $\mathbf{P}_\alpha = 0$ だから) と置き換えられている. 更に, 極座標を用いると $d^3\mathbf{q}_1 = q_1^2 d|q_1| d\Omega$ となるが, このうち, $|q_1|$ の値は残っているデルタ関数のため固定されてしまっている. そこで (やや形式的だが) $|q_1|$ 積分を実行し, このデルタ関数を消してしまおう:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{+\infty} |q_1| d|q_1| \delta(\sqrt{s} - q_1^0 - q_2^0) \frac{|q_1|}{64\pi^2 q_1^0 q_2^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}$$

$$\left(\text{但し } s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_1^0 + p_2^0)^2 \right)$$

ここで, $|q_1|^2 = (q_1^0)^2 - M_1^2 = (q_2^0)^2 - M_2^2$ から $|q_1| d|q_1| = q_1^0 dq_1^0 = q_2^0 dq_2^0$ が得られることを利用して, 積分変数を $|q_1|$ から $q_1^0 + q_2^0$ に変換する. すると上式は

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} d(q_1^0 + q_2^0) \frac{q_1^0 q_2^0}{q_1^0 + q_2^0} \delta(\sqrt{s} - q_1^0 - q_2^0) \frac{|q_1|}{64\pi^2 q_1^0 q_2^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \\ &= \frac{|q_1|}{64\pi^2 \sqrt{s}} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \end{aligned}$$

となる. 更に $\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = |p_2^0 \mathbf{p}_1 - p_1^0 \mathbf{p}_2| = (p_2^0 + p_1^0) |\mathbf{p}_1| = \sqrt{s} |\mathbf{p}_1|$ を用いると結局

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|q_1|}{64\pi^2 s |\mathbf{p}_1|} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (146)$$

となる. ここで $|\mathbf{p}_1|, |q_1|$ は $s = (p_1^0 + p_2^0)^2 = (q_1^0 + q_2^0)^2$ などから

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1| &= \sqrt{(p_1^0)^2 - m_1^2}, & p_1^0 &= (s + m_1^2 - m_2^2)/(2\sqrt{s}) \\ |q_1| &= \sqrt{(q_1^0)^2 - M_1^2}, & q_1^0 &= (s + M_1^2 - M_2^2)/(2\sqrt{s}) \end{aligned}$$

である (146) 式は素粒子反応の解析においてよく利用される公式である.

崩壊幅の定義

電子 (Electron), 光子やニュートリノ (Neutrino) などごく少数の例外を除けばすべての素粒子は不安定で, 時間の経過とともにより軽い素粒子群に変化していく. これが崩壊現象で

ある．これも衝突過程と同じく素粒子相互作用の性質を調べるために頻繁に分析される現象で，断面積に対応して崩壊幅という量で記述される．これは1個の粒子の単位時間当りの崩壊確率を表す．数式的には断面積とほとんど同じように取り扱うことが出来るが，初期状態 $|\alpha\rangle$ としては通常は崩壊する粒子の静止状態を考える．その質量を m とすると，終状態が n 個の粒子でその運動量が $(q_i, q_i + d^3q_i)$ という区間にあるような崩壊の，全時間・空間における回数は (141) と同じく

$$dN = VT \prod_{i=1}^n d^3\tilde{q}_i (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (147)$$

となる．但し，ここでは $P_\alpha = (m, 0, 0, 0)$ である．始状態 (1粒子状態) は全空間に $2P_\alpha^0 V (= 2mV)$ 個の粒子が存在する状態を表していたから，結局この場合の微分崩壊幅 (Differential decay width) は

$$d\Gamma = \prod_{i=1}^n d^3\tilde{q}_i \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \quad (148)$$

ということになる．これも終状態が2体の場合には

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{q}|}{32\pi^2 m^2} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (149)$$

と簡単になる．また， $d\Gamma$ をすべての運動量領域にわたって積分し，更にすべての異なる終状態について足し上げた量は全崩壊幅 (Total decay width) と呼ばれる：

$$\Gamma = \sum_{\text{全終状態}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n d^3\tilde{q}_i \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \quad (150)$$

一方，終状態を特定の状態 f に限ったもの Γ_f およびそれと Γ との比 $B_f = \Gamma_f/\Gamma$ はそれぞれ終状態 f への部分崩壊幅 (Partial decay width) および分岐比 (Branching ratio) と呼ばれる．

1.4 . 不変散乱振幅とファインマン則

共変摂動論において不変散乱振幅がどのように導かれるかの例として，スカラー粒子同士の散乱 $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ を摂動の最低次の近似で扱ってみる．相互作用としては $\lambda\phi^4$ 模型

$$\mathcal{L}_1(x) = -\frac{\lambda}{4!} : \phi^4(x) : \quad (151)$$

を考える．S行列の摂動展開 $S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots$ において最低次の近似で寄与するのは

$$S^{(1)} = i \int d^4x \mathcal{L}_1(x) = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x : \phi^4(x) : \quad (152)$$

である．散乱前の粒子の運動量を p_1, p_2 ，散乱後の運動量を p_3, p_4 としよう：

$$\begin{aligned} & \langle \phi(\mathbf{p}_3)\phi(\mathbf{p}_4)|S^{(1)}|\phi(\mathbf{p}_1)\phi(\mathbf{p}_2)\rangle \\ &= -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0|a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4) : \phi^4(x) : a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \end{aligned} \quad (153)$$

始状態と終状態で粒子数は変化していないから， $\phi(x)$ をその生成演算子部分 $\phi^{(c)}(x)$ ($c = \text{creation}$) と消滅演算子部分 $\phi^{(a)}(x)$ ($a = \text{annihilation}$) に分けて^{#22} $:\phi^4(x):$ を展開した時，各項の中で生成・消滅演算子が二つずつ含まれているものだけが効く．四つの $\phi(x)$ の中から二つの生成（あるいは消滅）演算子を抜き出す方法は ${}_4C_2 = 6$ 通りあるから

$$\begin{aligned} &= -\frac{6i\lambda}{4!} \int d^4x \langle 0|a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)\phi^{(c)}(x)\phi^{(c)}(x)\phi^{(a)}(x)\phi^{(a)}(x)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \\ &= -\frac{i\lambda}{4} \int d^4x \int \prod_{i=1}^4 d^3\tilde{\mathbf{q}}_i e^{i(q_1+q_2-q_3-q_4)x} \\ & \quad \times \langle 0|a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)a(\mathbf{q}_3)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{q}_3)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \\ &= a(\mathbf{q}_3)[a(\mathbf{q}_4), a^\dagger(\mathbf{p}_1)]a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle + a(\mathbf{q}_3)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a(\mathbf{q}_4)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle \\ &= a(\mathbf{q}_3)(2\pi)^3 2q_4^0 \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle + a(\mathbf{q}_3)a^\dagger(\mathbf{p}_1)[a(\mathbf{q}_4), a^\dagger(\mathbf{p}_2)]|0\rangle \\ & \quad + a(\mathbf{q}_3)a^\dagger(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2)a(\mathbf{q}_4)|0\rangle \end{aligned}$$

と変形していけるが，最後の項では消滅演算子が直接 $|0\rangle$ に作用するので 0 となる．更に同様の計算を続けると

$$\begin{aligned} &= (2\pi)^3 2q_4^0 \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_1)[a(\mathbf{q}_3), a^\dagger(\mathbf{p}_2)]|0\rangle \\ & \quad + (2\pi)^3 2q_4^0 \delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_2)[a(\mathbf{q}_3), a^\dagger(\mathbf{p}_1)]|0\rangle \\ &= (2\pi)^6 2q_3^0 2q_4^0 [\delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_2)\delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_1) + \delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_1)\delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_2)]|0\rangle \end{aligned}$$

となり，演算子は姿を消してしまう．すると，残る $a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)$ も直接 $|0\rangle$ に掛かるようになるので，上の計算と全く同じ変形が出来，

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_4)a^\dagger(\mathbf{q}_1)a^\dagger(\mathbf{q}_2)|0\rangle \\ &= (2\pi)^6 2q_1^0 2q_2^0 [\delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_4)\delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_3)\delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_4)]|0\rangle \end{aligned}$$

^{#22}通常は $\phi^{(c)}(x)$ は負の振動数部分ということで $\phi^{(-)}(x)$ と，また $\phi^{(a)}(x)$ は正振動数部分ということで $\phi^{(+)}(x)$ と記される．しかしながら少なくとも筆者にはどうしても $\phi^{(+)}(x)$ の方が生成部分に見えてしまうので，ここでは $(c), (a)$ を用いることにする．

となり，最後に $\langle 0|$ と $|0\rangle$ が結合し 1 となる．また， $e^{i(q_1+q_2-q_3-q_4)x}$ の x 積分はデルタ関数になるので，結局

$$\begin{aligned}
& \langle \phi(\mathbf{p}_3)\phi(\mathbf{p}_4)|S^{(1)}|\phi(\mathbf{p}_1)\phi(\mathbf{p}_2)\rangle \\
&= -\frac{i\lambda}{4} \int (2\pi)^{12} \prod_{i=1}^4 (2q_i^0) d^3\tilde{\mathbf{q}}_i (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \\
&\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_2)\delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_1) + \delta^3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_1)\delta^3(\mathbf{q}_4 - \mathbf{p}_2) \right] \\
&\quad \times \left[\delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_4)\delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_3)\delta^3(\mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_4) \right] \\
&= -i\lambda(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \tag{154}
\end{aligned}$$

これを不変散乱振幅の定義 (140) と比較してみると，この場合は

$$\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi) = -\lambda \tag{155}$$

であることがわかる．

このように計算を進めれば，対象となる相互作用ラグランジアンから出発して，いつでも必要な不変散乱振幅を導き出すことが出来る．しかし，上の例はスカラー粒子のみが関与したからまだ簡単だったが，スピノルやベクトルが絡む反応は，もっと複雑になるので，毎回それを行うのは面倒である．ところが幸いなことに，このような計算をはじめに必要な分濟ませて或る規則を導いてしまえば，あとは散乱振幅はある種の図形 (ファインマン図: Feynman diagram) に対応させて求められることが知られており，その規則はファインマン則 (Feynman rule) と呼ばれている．

付 録

- 相対論記法

計量テンソル： $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$

反変ベクトル： $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$

共変ベクトル： $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\mathbf{x})$

内積： $px = p^\mu x_\mu = p_\mu x^\mu = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = g^{\mu\nu}p_\mu x_\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p}\mathbf{x}$

微分記号： $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu = (\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3)$
 $= (\partial/\partial t, \nabla)$

$$\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu = (\partial/\partial x_0, \partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$$
$$= (\partial/\partial t, -\nabla)$$

$$\equiv \partial^\mu \partial_\mu = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$$

- 運動量の 3 次元積分要素

場の演算子の平面波展開（運動量展開）に現われる 3 次元積分要素

$$d^3\tilde{\mathbf{p}} \equiv d^3\mathbf{p}/[(2\pi)^3 2p^0]$$

- デルタ関数

$$\delta(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm ipx}, \quad \delta^4(p) = \delta(p^0)\delta(p^1)\delta(p^2)\delta(p^3)$$

- 階段関数

$$\theta(x) = 1 \text{ (} x > 0 \text{ の時), } = 1/2 \text{ (} x = 0 \text{ の時), } = 0 \text{ (} x < 0 \text{ の時)}$$

これを微分するとデルタ関数になる： $\delta(x) = d\theta(x)/dx$

- 単位行列・零行列

次元に関わらず単位行列は I, 零行列は O で表すが, 誤解の恐れのない場合には単に 1, 0 と記すこともある. 例えば, $1 + \gamma_5$ においては 1 は 4 行 4 列の単位行列であることは明らかだろう.

• 単位について

ここでは他の多くのテキストと同じくディラック定数 \hbar および光速 c を基準とする自然単位系を用いる：

$$\hbar = c = 1$$

これは、単位の中に J·s を含む量を扱う場合にはその部分は $\hbar = 1.05457266 \times 10^{-34}$ J·s を基準として、また、m/s を含む量ならその部分は $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s を基準として「その何倍」という表し方をするとということを意味する。例えば、光速それ自体は c の 1 倍ということで上記のように次元なしの数 $c = 1$ になる。もう少し一般的な例として v [m/s] という或る物体の速さを考えると

$$v \text{ [m/s]} = \frac{v \text{ [m/s]}}{c \text{ [m/s]}} c \text{ [m/s]}$$

と変形でき、右辺で $v \text{ [m/s]}/c \text{ [m/s]}$ は「光速の何倍」という無次元の数値になるが、これが自然単位系でのその物体の速さである。また、特殊相対論には有名な $E = mc^2$ という関係式があり、この右辺の単位は $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$ だが、自然単位系ではこのうち m^2/s^2 の部分、つまり c^2 を 1 としてしまうため、エネルギーと質量が同じ次元を持つようになる。同様に、長さと同時間は共にエネルギーの逆数の次元となる。

この単位系で与えられた量を通常の数値に直すには、元々の次元になるように \hbar と c を組み合わせで掛けたり割ったりすればよい。つまり、通常単位系で $a\hbar^m c^n$ という量は自然単位系では単に a となっているから、この a の本来の単位（次元）から m, n を決めて、 a に $\hbar^m c^n$ を掛けてやるのである。散乱断面積の場合なら、GeV 単位で与えられた量を用いて計算すれば GeV^{-2} という単位になるが、これに $(\hbar c)^2 (= 0.38937966 \text{ GeV}^2 \text{ mbarn} : 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2)$ を掛ければ通常単位系の数値（面積の次元）に戻る：

$$[\text{mbarn 単位の断面積}] = 0.38937966 \times [\text{GeV}^{-2} \text{ 単位の断面積}]$$

例えば、 2 GeV^{-2} という断面積は 0.77875932 mbarn である。