A Finite-Range Scaling Method
-Application to the Long Range Ising Model-

2008.05.25　北陸合宿(立山)

金沢大　青木健一、小林玉青、富田洋

目次

- 量子散逸系・量子古典相転移
- **Ising spin model**
- **Block DRG**
- 有限レンジスケーリング (**Finite Range Scaling**)
- 臨界摩擦の定量的な評価

A Finite-Range Scaling Method to Analyze Systems with Infinite-Range Interactions,
Ken-Ichi Aoki, Tamao Kobayashi and Hiroshi Tomita,
Prog.Theor.Phys. 119-3(2008)509-514

無限長距離相互作用(1次元)へのアプローチ

BDRG による
Finite Range exact calculation

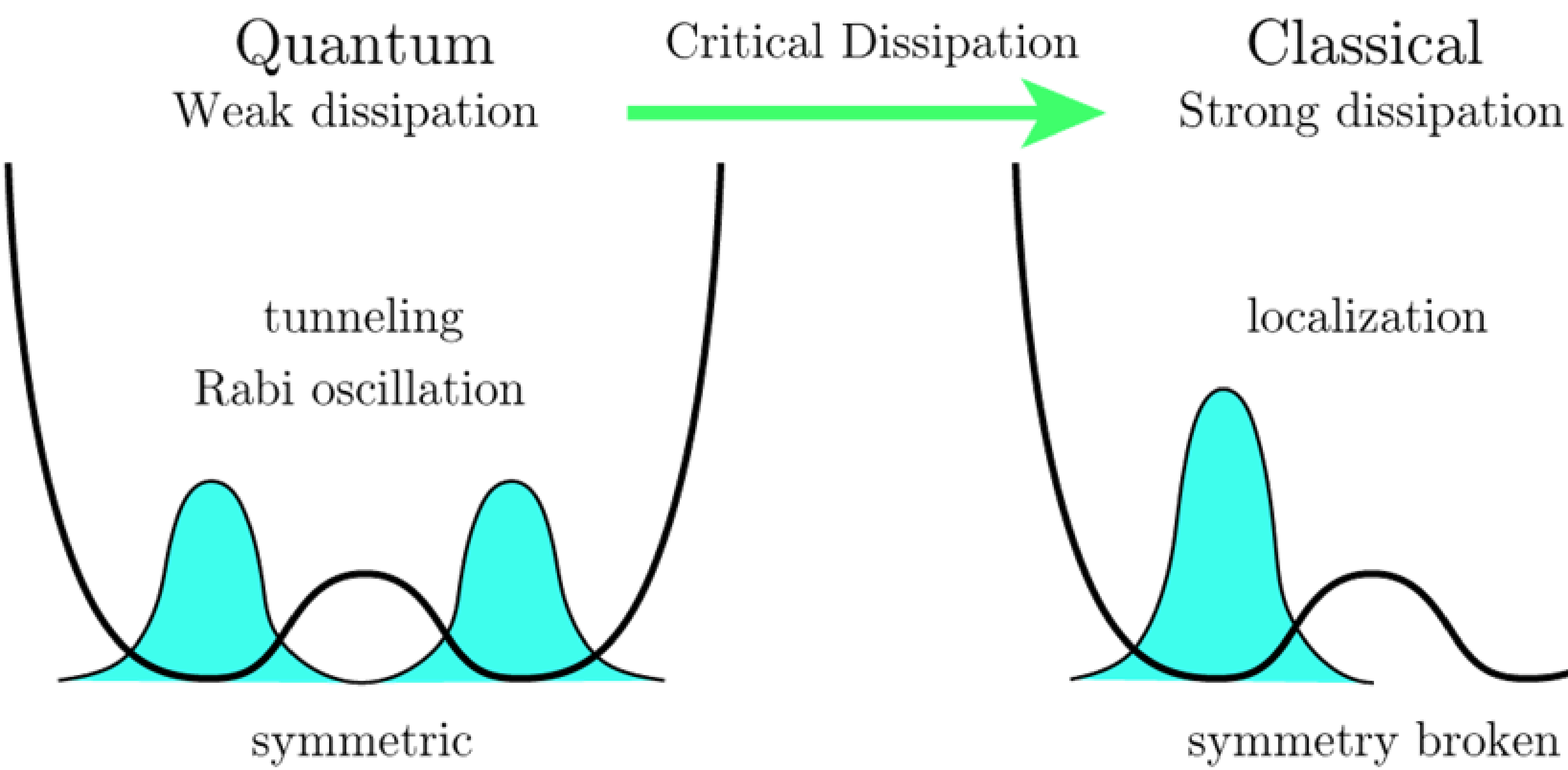
＋

Finite-Range Scaling Analysis / FRS

zeta function singularity determining
the critical coupling constant

量子古典相転移

臨界摩擦



量子散逸系

- 摩擦＝エネルギー散逸の効果を量子力学的に扱うのは難しい。
  - ✓ 古典力学では速度比例の抵抗力を加えるなど、運動方程式への変更で扱うことができる。
  - ✓ 量子力学の定式化ではハミルトニアン(あるいはラグランジアン）が必要。

- エネルギー散逸をミクロの作用に戻って定式化する。
  - ✓ 環境自由度の中でのターゲット系の運動を考察。
  - ✓ 環境自由度の経路積分を先に行い、ターゲット系に対する有効相互作用(有効ラグランジアン)を求める。

Caldeira-Leggett model

microscopic action

$$S[\ q, \{x_\alpha\}] \ = \boxed{\int dt\ \left\{\frac{1}{2}M\dot{q}^2 - V_0(q)\right.}$$

ターゲット自由度

$$+\boxed{\sum_\alpha \left[\frac{1}{2}m_\alpha \dot{x}_\alpha^2 - \frac{1}{2}m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha^2 - qC_\alpha x_\alpha\right]}\Bigg\}$$

環境自由度

環境自由度の経路積分

$$\Delta S_{\mathrm{NL}}[q] = \frac{\eta}{4\pi}\int d\tau \int ds\ \frac{(q(\tau)-q(s))^2}{|\tau - s|^p}$$

非局所有効相互作用

- 1次元統計系としては、無限に続く長距離相互作用の系である。
- 相互作用が強くなるとターゲット系の量子的な側面が抑制され、古典的な運動が支配的になる。 → 臨界摩擦
- 古典力学として環境変数の境界条件を決めて運動方程式を解くと、環境自由度の状態分布を適当な形に決定すれば、確かに速度比例抵抗力の項 $-\eta\dot{q}$ を与えることが出来る。

量子力学の長距離相互作用

$$\Delta S_{\mathrm{NL}}[q] = \frac{\eta}{4\pi}\int d\tau \int ds\ \frac{(q(\tau)-q(s))^2}{|\tau - s|^p}$$

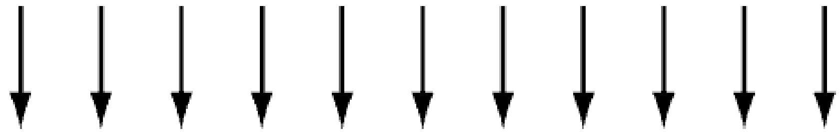
離散化

$$H = \eta \sum_{ij} \frac{\left(\sigma_i - \sigma_j\right)^2}{(i-j)^p} = -\sum K_n^{[p]}\sigma_i\sigma_{i+n} \qquad K_n^{[p]} \equiv \frac{\eta}{n^p}$$

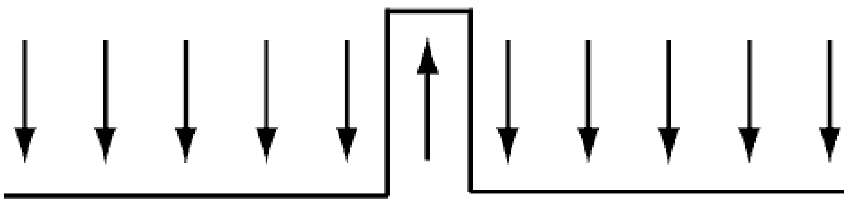
- 二重井戸ポテンシャルでは、site 変数を 2 state 近似して、Ising spinとみなせば、長距離相互作用のある Ising model と同等となる。
- 系を最も単純化した1次元拡張 Ising model を用いて、くりこみ群による解析を定式化する。

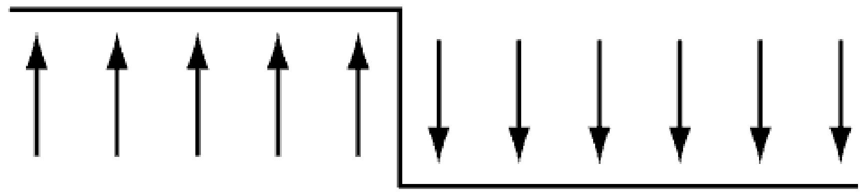
臨界摩擦についての予想

$$K_n \equiv \frac{\eta}{n^p}$$



エネルギー 0





$$2\sum_{n}^{\infty} K_n \longrightarrow \infty \quad (\text{if } p \leq 1)$$

$\Rightarrow$ *ordered*

(局在化に相当。)

$$\sum_{n}^{\infty} nK_n < \infty \quad (\text{if } p > 2)$$

$\Rightarrow$ *disordered*

(期待値を持たない。)

$1 < p \leq 2$ では有限の臨界摩擦 η_c の存在が期待される。

求めたい！

無限長距離相互作用(1次元)へのアプローチ

BDRG による
Finite Range exact calculation

+

Finite-Range Scaling Analysis / FRS

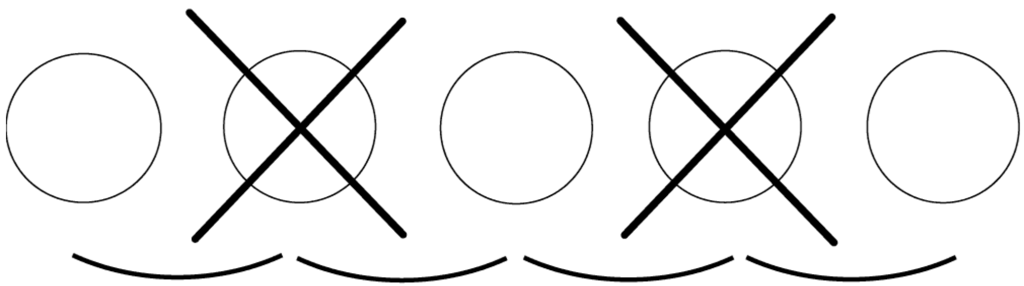
zeta function singularity determining
the critical coupling constant

通常の DRG

最近接模型 $\rightarrow$ nearest neighbor interaction： K_1

$$H = -\sum K_1 \sigma_i \sigma_{i+1}$$

DRG (Decimation Renormalization Group)



cf. $$\sum_{\sigma_2=\pm 1} e^{K_1\sigma_1\sigma_2} e^{K_1\sigma_2\sigma_3}$$
$$= e^{K_1(\sigma_1+\sigma_3)} e^{-K_1(\sigma_1+\sigma_3)}$$
$$= 2\cosh\{K_1(\sigma_1+\sigma_3)\}$$

T matrix (相互作用を表現)

$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} \exp(K_1+h) & \exp(-K_1) \\ \exp(-K_1) & \exp(K_1-h) \end{pmatrix}$$

くりこみ変換 (decimation)

$$T^{(k)} \equiv T^{(k-1)}\ T^{(k-1)}$$

分配関数：$Z^{(k)} = \mathrm{Tr}\ T^{(k)}$

自由エネルギー：$F^{(k)} = \frac{1}{2^k} \log \mathrm{Tr}\ T^{(k)}$
(1 site あたり)

無限サイズの系の Susceptibility (外場感受率)：

$$\chi^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left.\frac{\partial^2}{\partial h^2} F^{(k)}\right|_{h=0}}_{\chi^{(k)}} = \exp(2K_1)$$

$$\boxed{\text{対数感受率：} \log \chi^{(\infty)} = 2K_1}$$

BDRG (Block Decimation Renormalization Group)

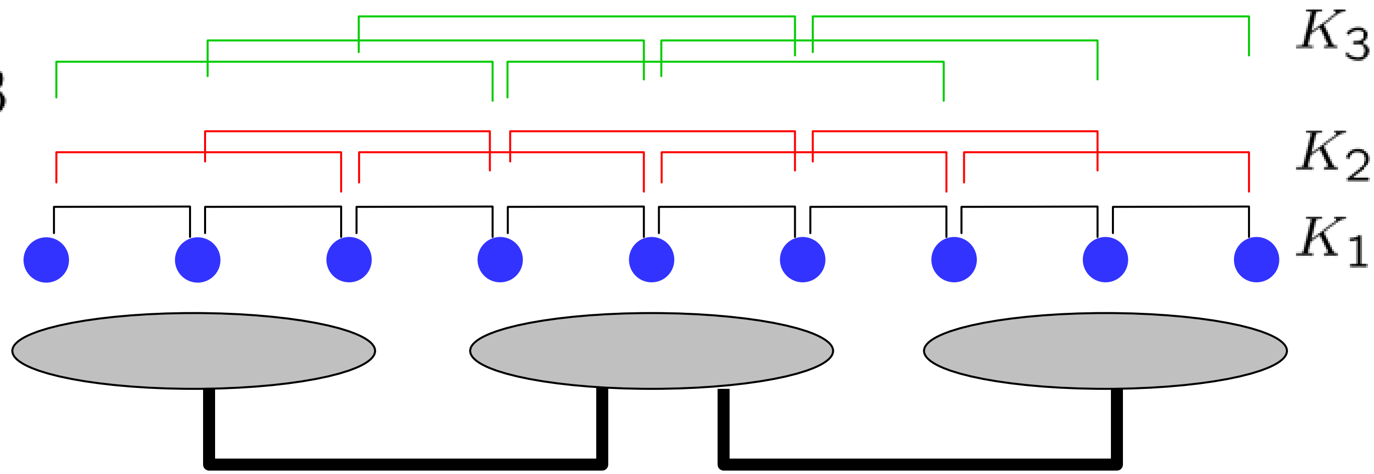
-for extended Ising spin model-

- 非最近接相互作用があると、通常の DRG は無限次元の相互作用空間に広がり簡単には扱えない。
- 相互作用の最大距離 n を有限におき、その n 個の site をブロック化する DRG の拡張を行い、長距離相互作用 K_n（＞0）に対応する。

$$H = -\sum K_n^{[p]} \sigma_i \sigma_{i+n} \quad K_n^{[p]} \equiv \frac{\eta}{n^p} = \frac{K_1}{n^p}$$

例

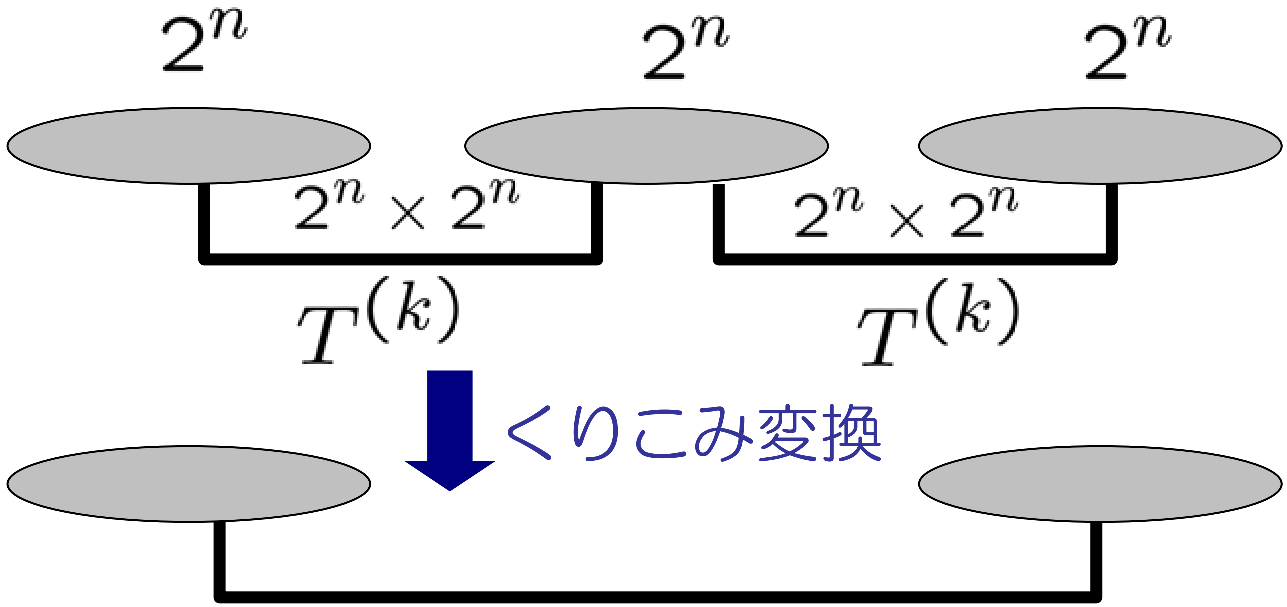
$n = 3$



ブロックを単位として見れば、最近接相互作用しかない。

長距離相互作用の系もDRGのように扱うことができる。

ブロックの状態数：2^n
ブロック間の相互作用を表す T matrix の次元：$2^n \times 2^n$



$$T^{(k+1)} = T^{(k)} T^{(k)}$$

BDRG は finite-range system を exact に計算可能、かつその相互作用空間を制限した近似(ABDRG, N-ABDRG)は、系の局在化相転移に関する性質をよく記述する。

ABDRG

Aligned Block
Decimation Renormalization Group
相互作用空間を制限したBDRG

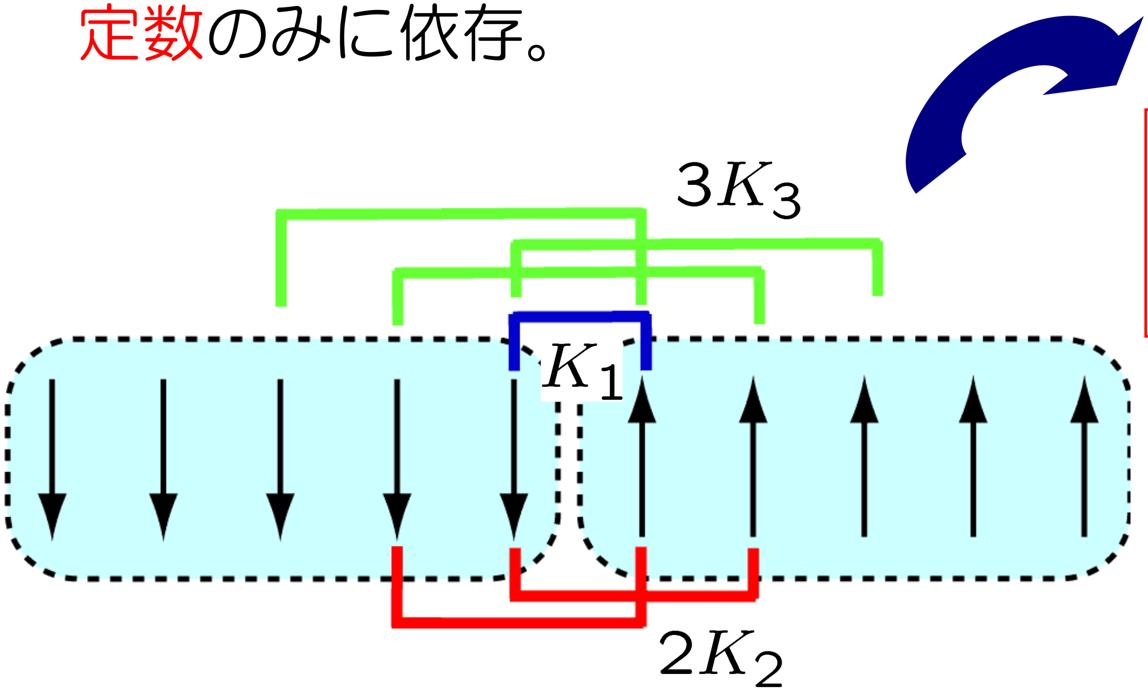
● 最近接相互作用がある程度強い場合を想定(strong coupling region)する。近いスピンの相関は非常に高いはず。

●ブロックの多数の状態の中から、ブロック内の全スピンが同一方向を向いているという２状態だけを考慮。

$$\Uparrow \equiv \uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow, \quad \Downarrow \equiv \downarrow\downarrow\cdots\downarrow\downarrow$$

有効相互作用定数

ABDRGの出発点は特別な線形結合で定義される有効相互作用定数のみに依存。



$$K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{S}]} \equiv \sum_{m=1}^{n} mK_m$$

T matrix：

$$T^{(0)}_{\Uparrow\Uparrow} = T^{(0)}_{\Downarrow\Downarrow} = \exp(K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{S}]})$$
$$T^{(0)}_{\Uparrow\Downarrow} = T^{(0)}_{\Downarrow\Uparrow} = \exp(-K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{S}]})$$

ABDRG は形式的に最近接模型と同等！ → 解析的に解ける。

$$\log(\chi^{(\infty)}) = 2K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{S}]} + \log(n)$$

$K_1 \to K_{\mathrm{eff}}$

$\log \chi^{(\infty)} = 2K_1$

対数感受率は有効相互作用定数に線形

対数感受率と有効相互作用定数

- Strong coupling region

(BDRG 数値計算、近似くりこみ群 N-ABDRG の結果)

$$\log\chi = 2\sum_n nK_n \equiv 2K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{S}]}$$

- Weak coupling region　（摂動論の初項）

$$\log\chi(K_1, K_2, \cdots K_n)$$

$$\simeq \log\chi(0,0,\cdots 0) + 2K_1 + 2K_2 + \cdots 2K_n$$

$$= 2\sum_n K_n \equiv 2K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{W}]}$$

cf. $\log\chi^{(\infty)} = 2K_1$

有効相互作用定数 $K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{S}]}, K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{W}]}$

Susceptibility Inequality

任意の結合定数の組み合わせに対して以下の不等式が成立する。

$$2K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{W}]} \leq \log \chi \leq 2K_{\mathrm{eff}}^{[\mathrm{S}]}$$

$$2\sum_n K_n \leq \log \chi \leq 2\sum_n nK_n$$

$n = 1$ の場合には両方の等号が成立。

数値計算では、この不等式への反例は見つかっていない。

解析的な証明も可能かもしれない。

無限長距離相互作用(1次元)へのアプローチ

BDRG による
Finite Range exact calculation

+

Finite-Range Scaling Analysis / FRS

zeta function singularity determining
the critical coupling constant

Finite Range Scaling Hypothesis

n と $n-1$ の 対数感受率の差 $\Delta(n,p,\eta)$ を見る。

$$\Delta(n,p,\eta) \equiv \frac{1}{2\eta}\left(\log\chi(n) - \log\chi(n-1)\right)$$

- Weak region

$$\log\chi \Rightarrow 2K_{\text{eff}}^{[\text{W}]} = \sum_n \frac{\eta}{n^p} \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \left(\frac{1}{n}\right)^p$$

- Strong region

$$\log\chi \Rightarrow 2K_{\text{eff}}^{[\text{S}]} = \sum_n \frac{\eta}{n^{p-1}} \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \left(\frac{1}{n}\right)^{p-1}$$

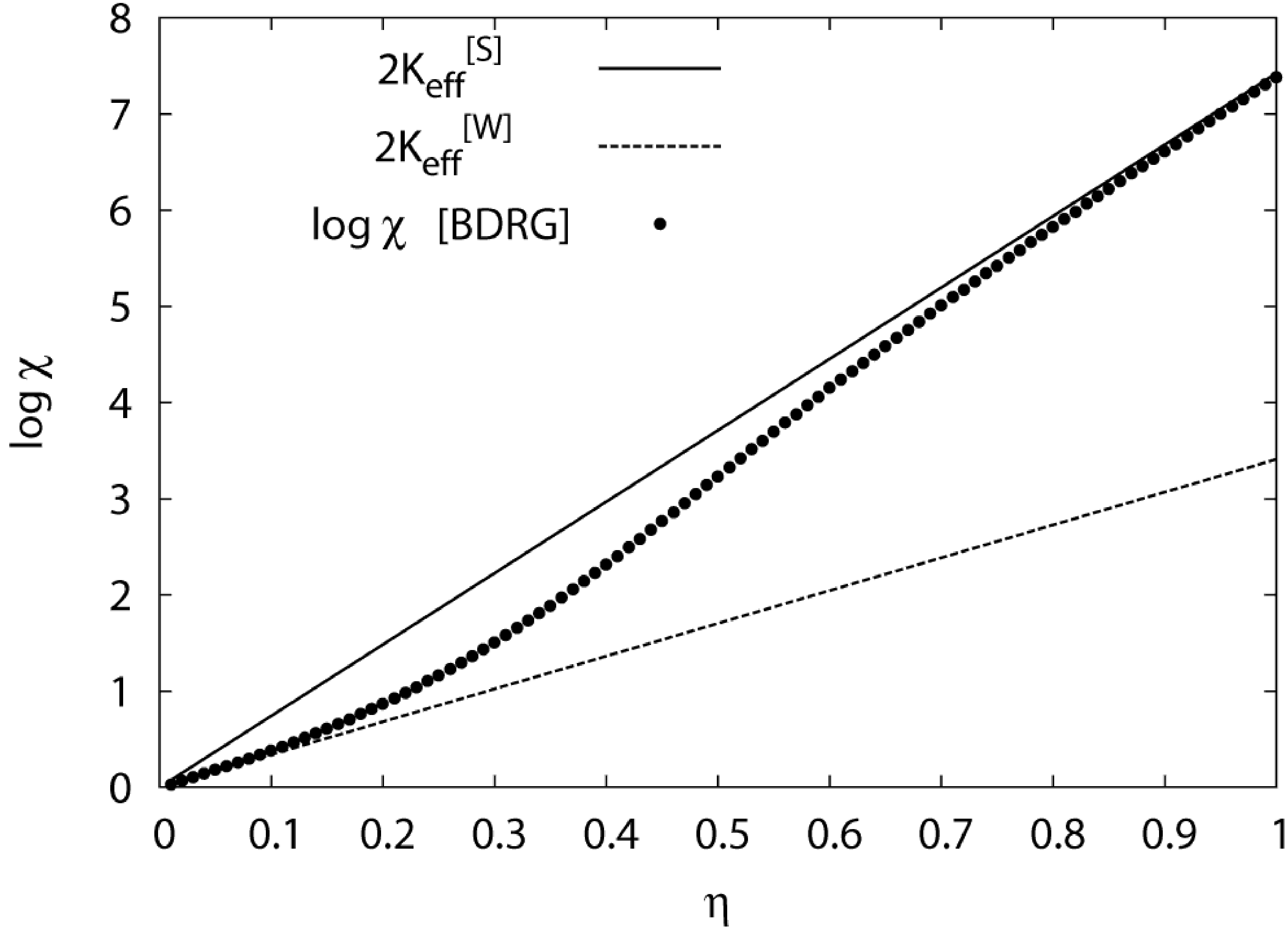
finite range scaling exponent β

$$\Delta(n,p,\eta) \equiv \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta(n,p,\eta)}$$

$$\beta(n,p,\eta) = \begin{cases} p & \text{small } \eta \\ p-1 & \text{large } \eta \end{cases}$$

Weak region から Strong region への変化

$p = 1.8, \eta = [0, 1], n = 11$



$\beta(n, p, \eta)$ による infinite range analysis

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \log\chi &= 2\eta \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(\infty, p, \eta) \\
&= 2\eta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\beta(\infty,p,\eta)} + \text{finite} \\
&= 2\eta\ \zeta[\beta(\infty, p, \eta)] + \text{finite}
\end{aligned}
$$

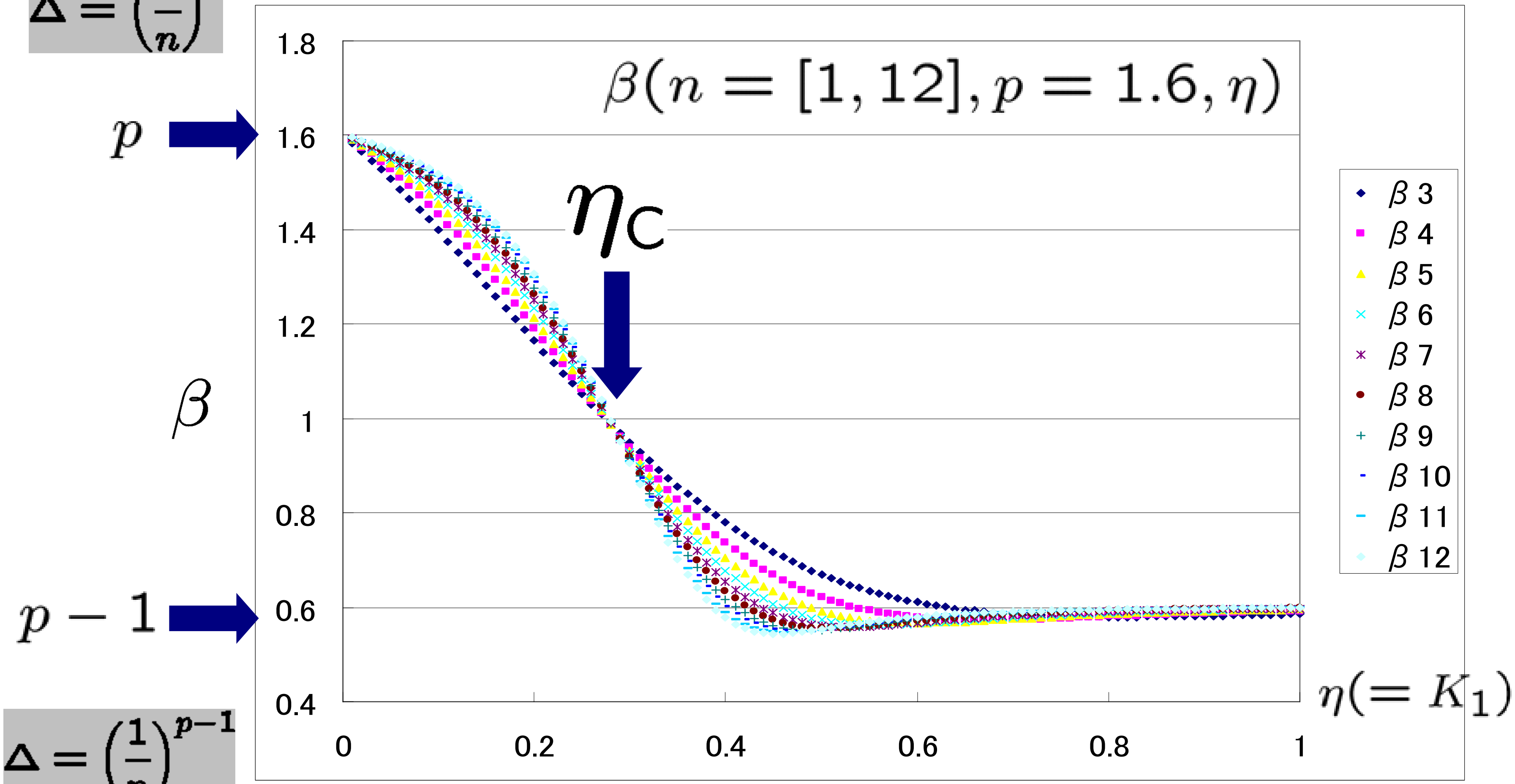
ζ ：Zeta関数 $\longrightarrow \dfrac{1}{\beta - 1}$

pole position 1 で発散

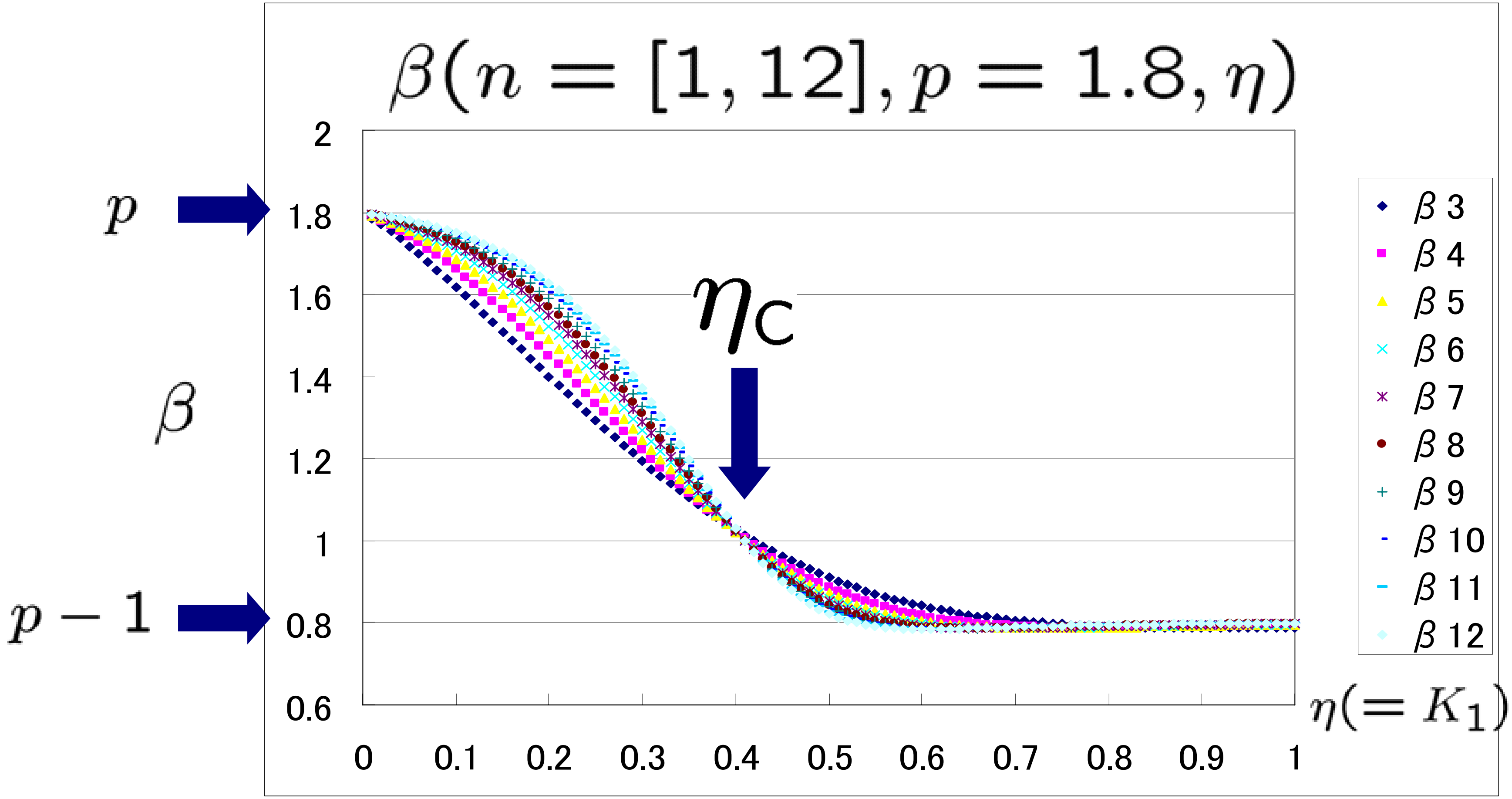
$$\eta_c \Leftarrow \beta(\infty, p, \eta_c) = 1$$

ζ 関数の pole position

$$\Delta = \left(\frac{1}{n}\right)^{p}$$



$$\Delta = \left(\frac{1}{n}\right)^{p-1}$$



$\beta=1$ の近傍で、n-dependence がなくなる！（理由は未だ不明･･･）

無限長距離相互作用(1次元)へのアプローチ

BDRG による
Finite Range exact calculation

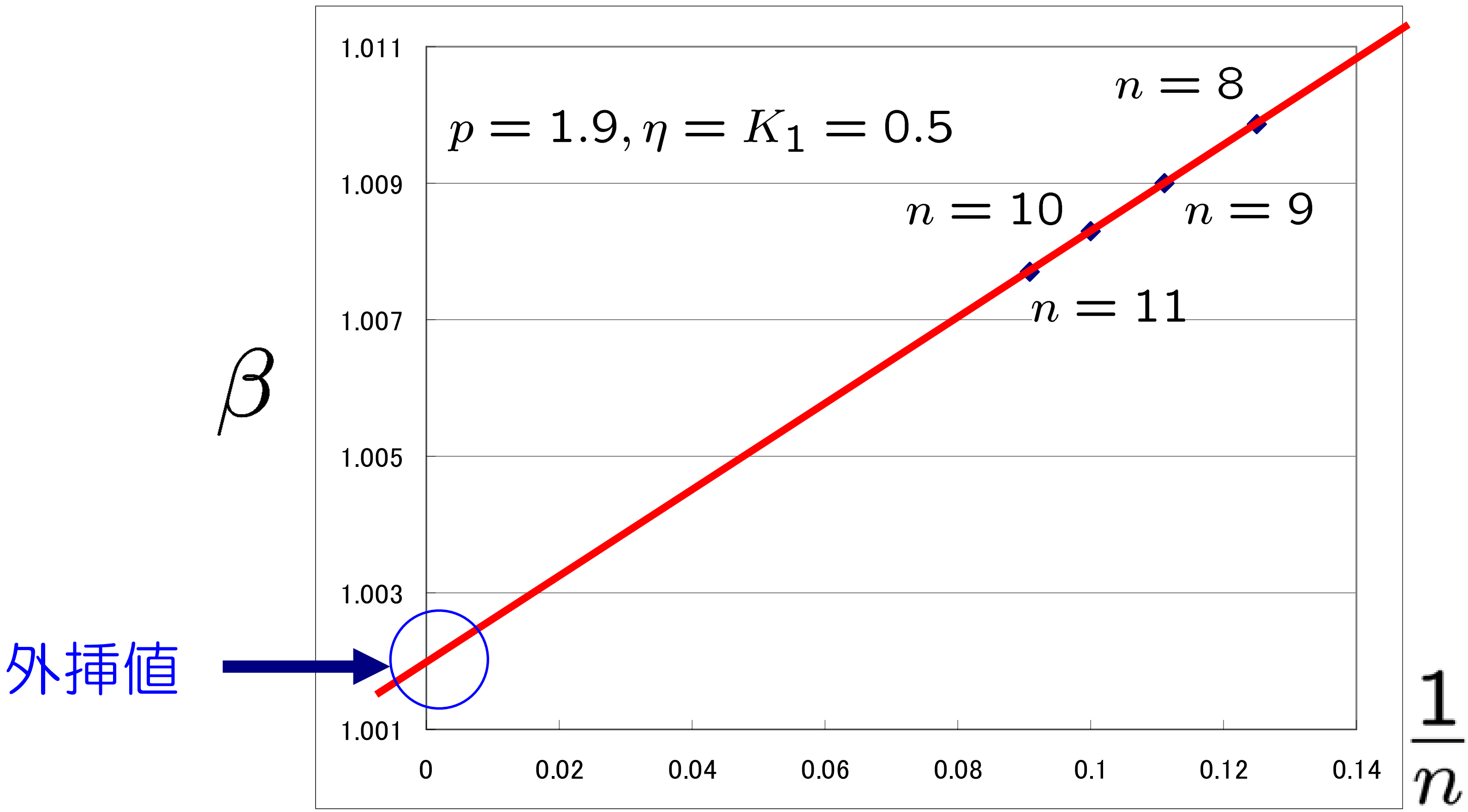
＋

Finite-Range Scaling Analysis / FRS

zeta function singularity determining
the critical coupling constant

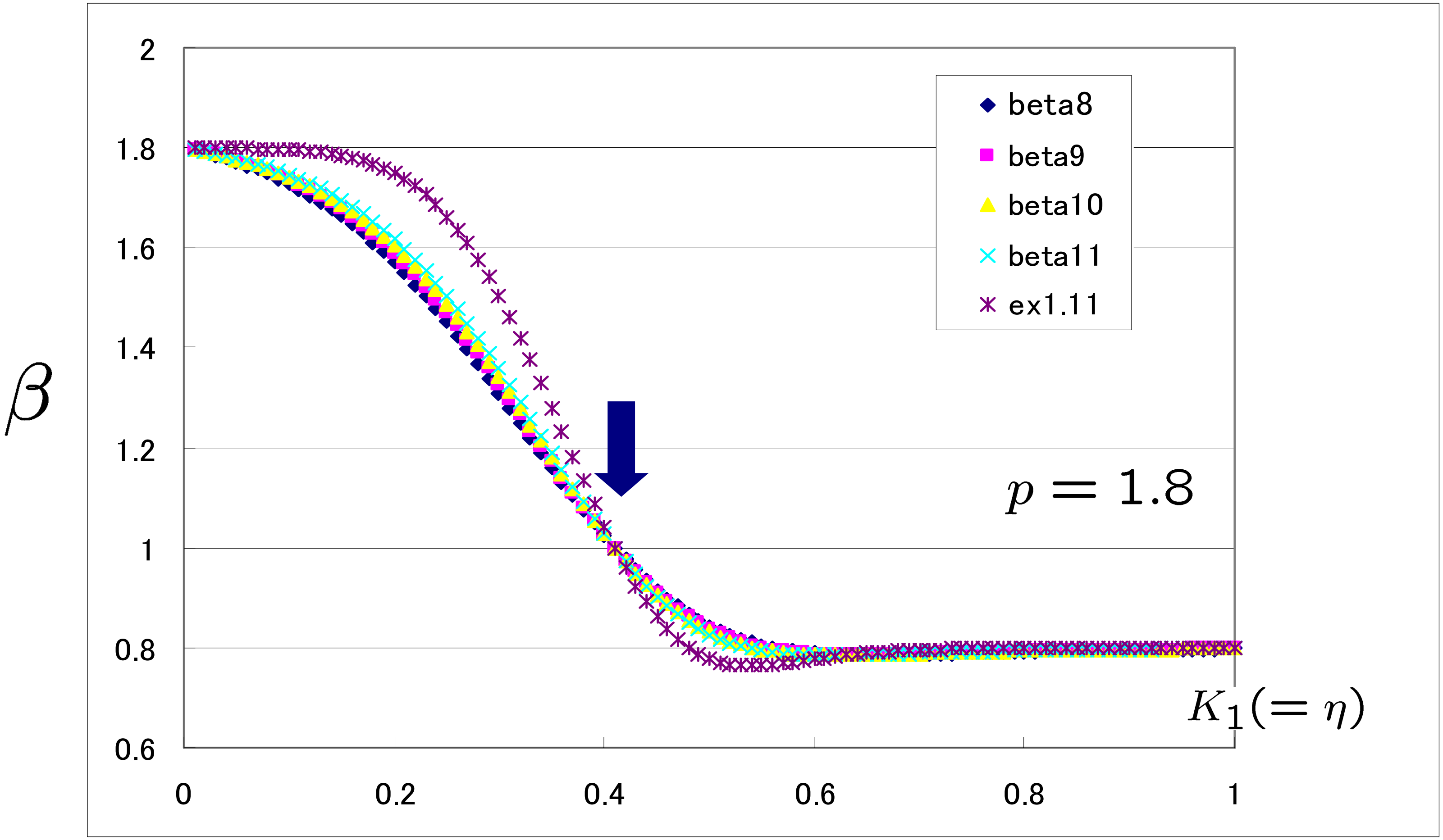
Infinite range を1/n 線形で外挿

＜BDRG による n が大きいところの β の評価＞

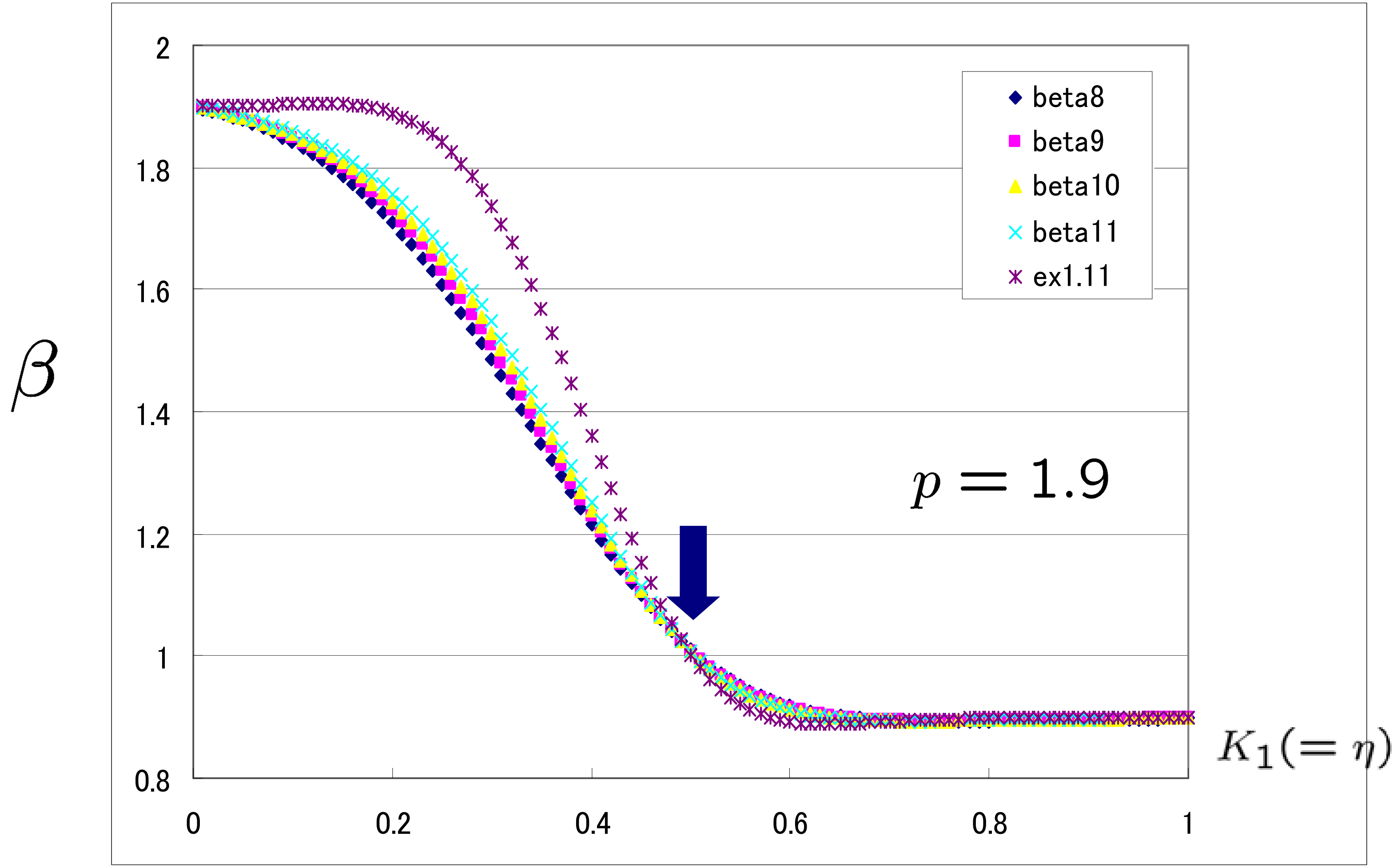


＜β の1/n 線形外挿の結果＞

transition はより sharp になる。



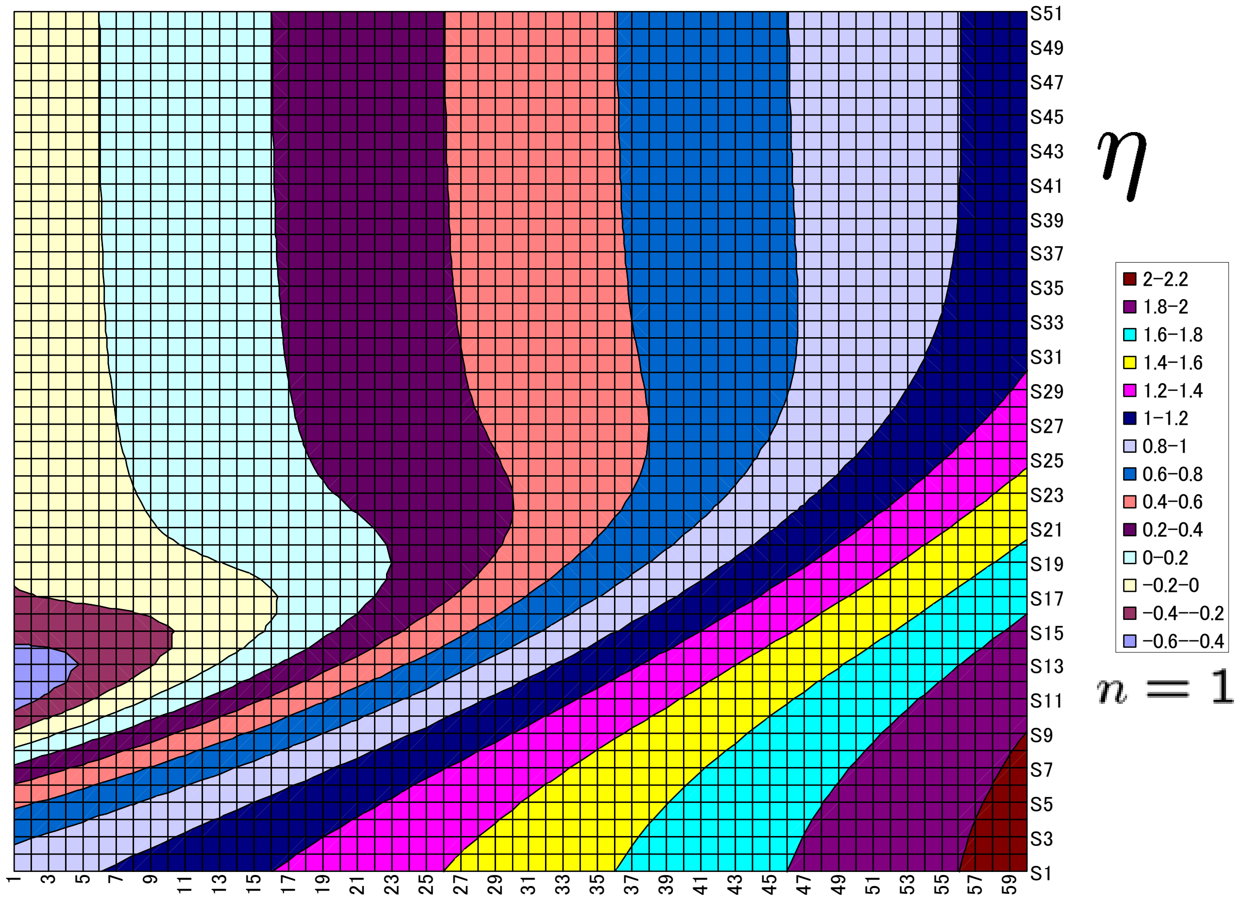
問題となるのは $\beta = 1$ をよぎる critical point だが、外挿値を含め、ほとんど η_c の値は動かない。



結果

⟨ β 等高線⟩

$p[0.9, 2.08] - \eta[0.01, 1]$

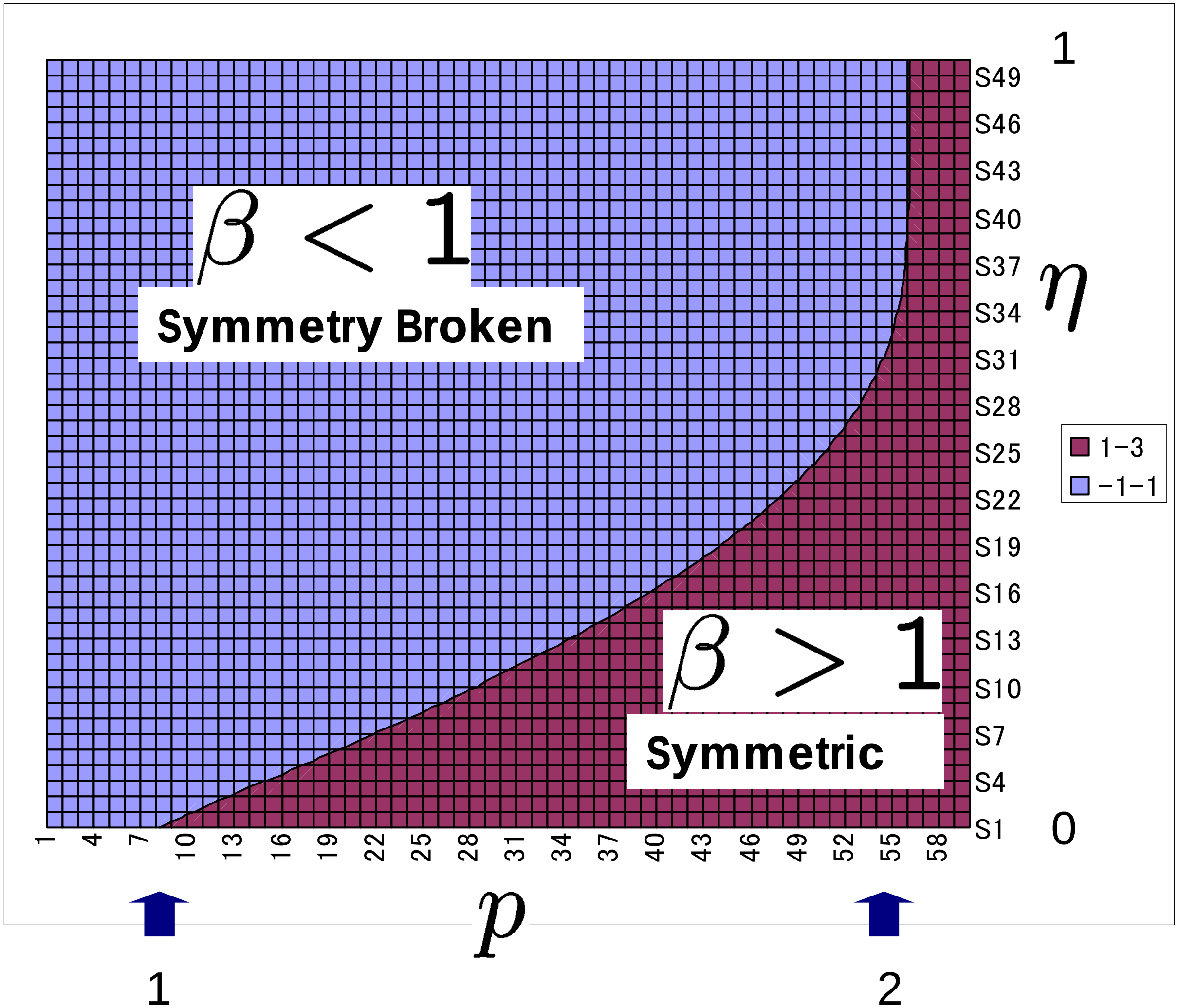


η

$n = 11$

p

⟨$p-\eta$ 相図⟩



無限長距離相互作用(1次元)へのアプローチ

BDRG による
Finite Range exact calculation

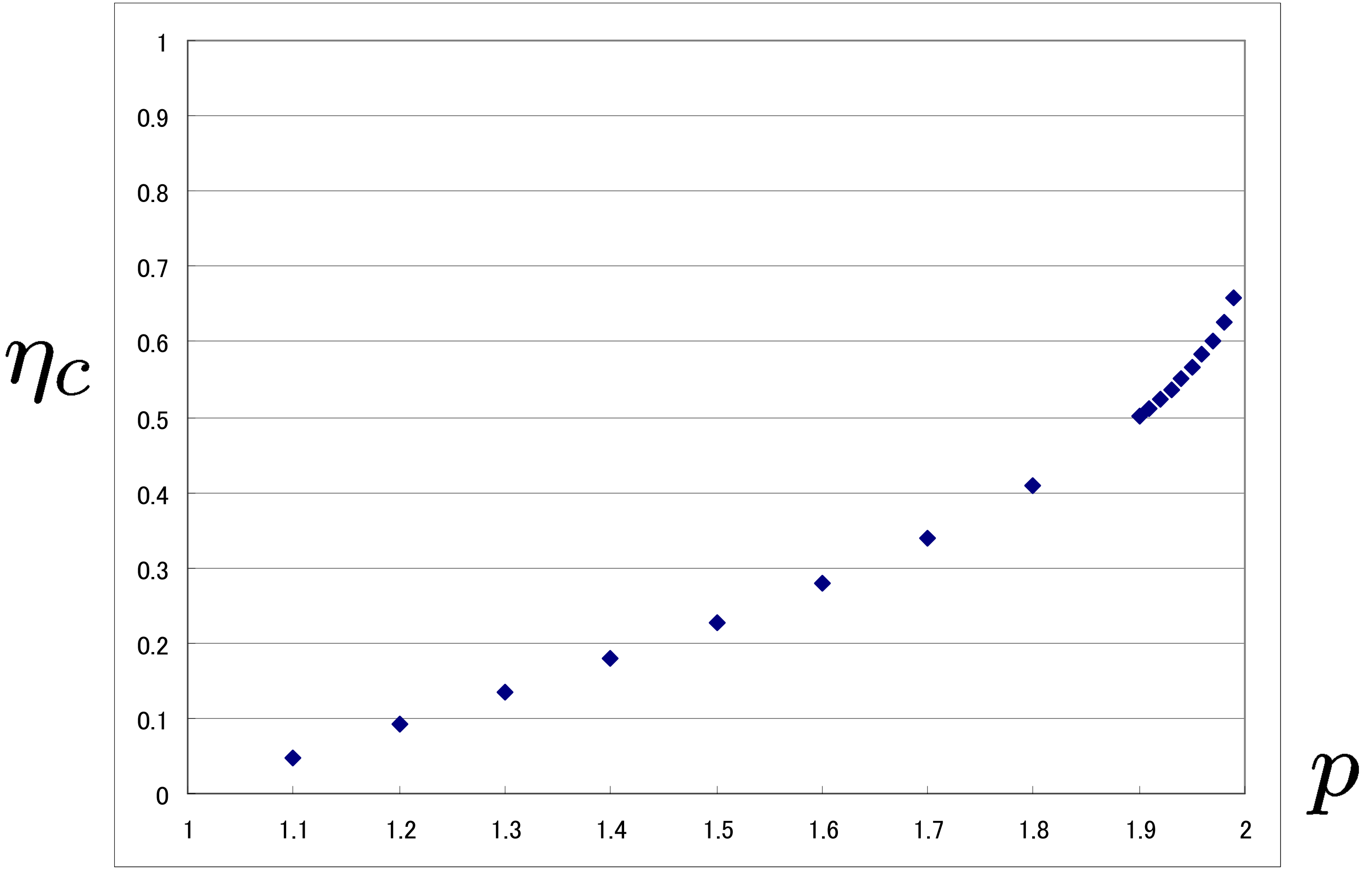
+

Finite-Range Scaling Analysis / FRS

zeta function singularity determining
the critical coupling constant

臨界摩擦の値

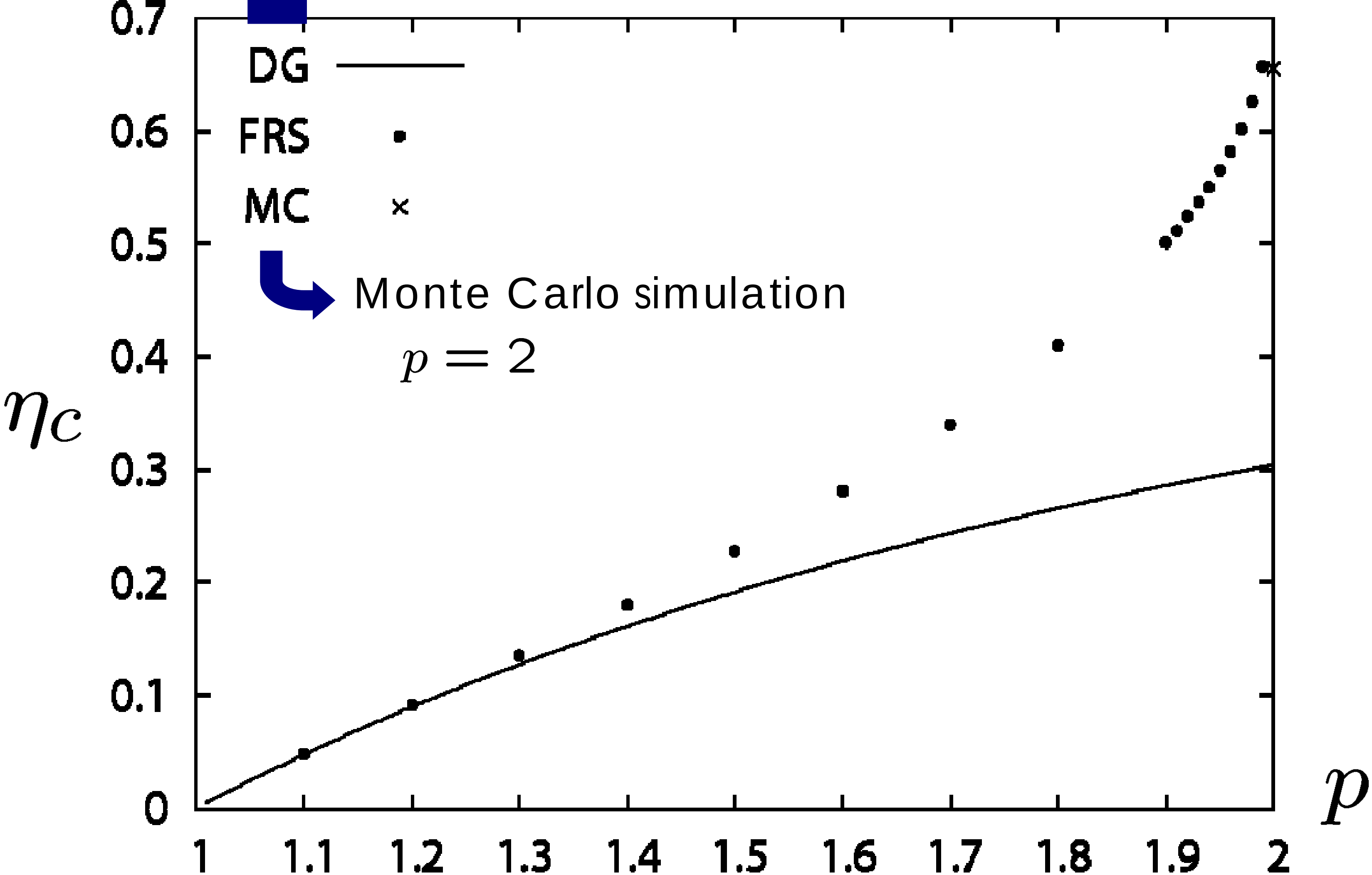
p に対して η_c の値が求められた！



p	η_c
1.1	0.0474
1.2	0.091
1.3	0.135
1.4	0.18
1.5	0.228
1.6	0.281
1.7	0.34
1.8	0.41
1.9	0.501
1.91	0.512
1.92	0.524
1.93	0.537
1.94	0.55
1.95	0.565
1.96	0.582
1.97	0.602
1.98	0.626
1.99	0.657

臨界摩擦の値の他の方法との比較

Dyson-Griffiths lower bound $\eta_c > \dfrac{0.5}{\zeta(p)}$



無限長距離相互作用(1次元)へのアプローチ

BDRG による
Finite Range exact calculation

＋

Finite-Range Scaling Analysis / FRS

zeta function singularity determining
the critical coupling constant

まとめと今後の課題

長距離相互作用のある Ising spin model (double well potential の 2 state 近似とみなせる) において、

●BDRG は finite-range system を exact に計算出来、かつその相互作用空間を制限した近似(ABDRG, N-ABDRG)は、系の局在化相転移に関する性質をよく記述する。
●Infinite-range interaction に対する新アプローチとして FRS (Finite-Range Scaling) を開発した。zeta 関数の pole position から p を η_c の関数として求めた！

量子力学系への Finite -Range Scaling のアプローチとして、ABDRG を散逸による長距離相互作用がある場合の量子力学系に適用し、局在化相転移についての情報が得られるかを調べる。具体的には定量的に η_c を求めたい。